

VERZEICHNIS
DER
VORLESUNGEN

WELCHE
AN DER KÖNIGLICH-BAYERISCHEN
JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT

ZU
WÜRZBURG

IM SOMMERSEMESTER 1845

GEHALTEN WERDEN.

MIT EINER ABHANDLUNG DES PROFESSORS MAYR ÜBER DIE TANGIRENDEN FLÄCHEN
ERSTER UND ZWEITER ORDNUNG.

WÜRZBURG
GEDRUCKT BEI FRIEDRICH ERNST THEIN.
(ZU HABEN IN DER STAHEL'SCHEN BUCHHANDLUNG.)

1845.

Das Semester beginnt gesetzlich am 31. März.

VORLESUNGEN.

I. DER THEOLOGISCHEN FACULTÄT.

PROFESSOR DR. HELM liest: 1) Die zweite Hälfte der Moraltheologie, nach Stapf, wöchentlich 5mal von 6—7 Uhr; 2) Pastoraltheologie, den didaktischen Theil mit Hinweisung auf Gollowitz und Hirscher; den liturgischen Theil mit Hinweisung auf Marzohl, wöchentlich 4mal von 11—12 Uhr.

PROFESSOR DR. VAL. REISSMANN: *A. Biblische Exegese*: 1) Synoptische Zusammenstellung und Erklärung des legislativen Theils des Pentateuches täglich von 8—9 Uhr; 2) über die Typologie im Mosaischen Cultus, wöchentlich 3mal. *B. Biblisch-orientalische Philologie*: 1) Hebräische Sprache, verbunden mit practischen Uebungen aus dem alten Testamente für den II. theol. Cursus, wöchentlich 2mal; 2) Syrische und Chaldaeische Sprache nach Jahn's Grammatik; 3) Arabische Sprache nach Jahn.

PROFESSOR DR. SCHWAB: 1) Kirchengeschichte nach eigenem Plane mit Hinweisung auf die Handbücher von Alzog, Döllinger, u. s. w., täglich von 8—9 Uhr; 2) Patristik über die Schriften und die Lehre Justins, des Philosophen, wöchentlich 3mal.

PROFESSOR DR. DEPPISCH: 1) Katholische Dogmatik und Symbolik, nach eigenem Plane unter Hinweisung auf Klee, täglich von 9—10 Uhr; 2) Religionsphilosophie, nach eigenem Plane, wöchentlich 5mal von 11—12 Uhr.

PROFESSOR DR. SEB. REISSMANN: 1) Erklärung des Johannes-Evangeliums, täglich von 10—11 Uhr; 2) Erklärung der katholischen Briefe in geeigneten Stunden; 3) Hebräische Sprache mit practischen Uebungen, *a)* für den theologischen Cursus, wöchentlich 2mal, *b)* für den philosophischen Cursus, wöchentlich 2mal; 4) Arabische Sprache, in geeigneten Stunden.

II. DER JURISTISCHEN FACULTÄT.

PROFESSOR DR. ALBRECHT liest: 1) Gemeines und bayerisches Kirchenrecht der Katholiken und der Protestanten, mit Hinweisung auf Walters Lehrbuch, täglich von 7—8 Uhr; 2) Civil- und Strafprocesspracticum aus dem Standpuncte des bayerischen Processrechtes, wöchentlich 4mal von 8—9 Uhr.

PROFESSOR DR. EDEL: 1) Gemeinen deutschen Strafprocess in Vergleichung mit dem französischen und bayerischen, nach eigenem Plane, täglich von 9—10 Uhr; 2) er-

bietet sich derselbe zu einem Conversatorium über die Grundbegriffe des Strafrechtes in 1—2 schicklichen Wochenstunden.

PROFESSOR DR. MÜLLER: 1) Deutsche Reichs- und Rechtsgeschichte, nach eigenem Plane, täglich von 8—9 Uhr; 2) bayerisches Staatsrecht, nach eigenem Plane, täglich von 10—11 Uhr.

PROFESSOR DR. HELD: 1) Gemeines deutsches Handels- und Wechsel-Recht, mit Hinweisung auf das bayerische, nach eigenem Plane, wöchentlich 3mal von 11—12 Uhr; 2) gemeines deutsches und bayerisches Lehenrecht, nach eigenen Heften, wöchentlich 3mal von 11—12 Uhr; 3) systematische Darstellung der wichtigsten bayerischen Particularrechte, verbunden mit einem Repetitorium über deutsches Privatrecht, täglich von 3—4 Uhr.

HOFRATH UND PROFESSOR DR. LANG: 1) Pandecten nach der fünften Ausgabe des Lehrbuchs von Wenning-Ingenheim, täglich von 10—12 Uhr; 2) Hermeneutik des römischen Rechts, wöchentlich 4mal von 4—5 Uhr.

PROFESSOR DR. BREITENBACH: 1) Römische Rechtsgeschichte, nach eigenem Plane, mit Hinweisung auf Walter, täglich von 9—10 Uhr; 2) Pandecten-Repetitorium, in gelegenen Stunden.

PRIVATDOCENT DR. PÖZL: 1) Bayerisches Staatsrecht, nach eigenem Plane, täglich von 10—11 Uhr; 2) Pandecten- und Civilprocess-Repetitorium in 5 zu bestimmenden Wochenstunden, privatissime; 3) französischen Civilprocess mit Rücksicht auf dessen Anwendung in der Pfalz, in 5 Wochenstunden, nach eigenen Heften, publice.

III. DER STAATSWIRTHSCHAFTLICHEN FACULTÄT.

PROFESSOR DR. GEIER liest: 1) Landwirthschaftslehre, nach seinem Lehrbuche, in noch zu bestimmenden Stunden, und leitet die practische Anschauung in Gärten und auf dem Felde, welche das Winter-Collegium ergänzen soll; 2) Forstwissenschaft (für den beginnenden Curs), täglich von 3—4 Uhr; 3) Forstwissenschaft (für den endenden Curs), täglich von 11—12 Uhr; beide Collegien unter Beziehung auf Hundeshagen und Pfeil, und mit Benützung von Herbarien, Jagdgeräthen, dann einer Samen-, Holz- und Modellsammlung; 4) Technologie mit chemischen und mechanischen Demonstrationen und mit Vorzeigung von rohen Stoffen, Fabricaten, Modellen und Apparaten aus dem technologischen Cabinet, zum Theile nach Bernoulli, zum Theile nach seiner landwirthschaftlichen Technologie, in noch zu bestimmenden Stunden; 5) Bergbaukunde, nach Brard in noch zu bestimmenden Stunden.

PROFESSOR DR. EDEL: Polizeiwissenschaft und Polizeirecht, nach eigenem Plane, täglich in noch zu bestimmenden Stunden.

PROFESSOR DR. DEBES: 1) Encyclopädie, Methodologie und Litteraturgeschichte der Cameralwissenschaften, nach Rau's Grundriss, wöchentlich 2mal in noch zu bestimm-

menden Stunden; 2) National-Oeconomie, nach eigenen Heften und mit Hinweisung auf Rau's Lehrbuch der practischen Oeconomie, 1ter und 2ter Band, wöchentlich 8mal in noch festzusetzenden Stunden; 3) Finanzwissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die bayerische Finanzgesetzgebung, nach Rau's Grundsätzen, täglich von 2—3½ Uhr; 4) Forstrecht, nach eigenen Heften, wöchentlich 2—3mal in noch zu ermittelnden Stunden; 5) erbiethet sich derselbe zu Examinatorien und Repetitorien aus der National-Oeconomie und Finanzwissenschaft.

Hinsichtlich der Vorlesungen über practische Geometrie für Forstmänner, Planzeichnen und Jagdkunde wird der Allergnädigsten Ernennung eines neuen Lehrers für dieselben zur Zeit noch entgegengesehen.

Ankündigungen von Vorlesungen über Forstbotanik und Forstmathematik sind in der medicinischen und philosophischen Facultät aufgeführt.

IV. DER MEDICINISCHEN FACULTÄT.

MEDICINALRATH UND PROFESSOR DR. VON D'OUTREPONT liest: 1) Geburtshülffliche Klinik in Verbindung mit Touchirübungen und einem Repetitorium und Examinatorium, täglich von 8—9 Uhr; 2) geburtshülfflichen Operations-Cursus, täglich von 2—3 Uhr; 3) über den jetzigen Standpunct der Geburtshülfe, in physiologischer und technischer Beziehung, als Einleitung und Einladung zu seinen Vorlesungen; 4) über den Unterschied des Menschen und des Thieres beim Gebären in physiologischer und pathologischer Beziehung, in Verbindung mit Vorzeigung erläuternder Präparate von Menschen und Thieren, Publice, in noch zu bestimmenden Stunden.

HOFRATH UND PROFESSOR DR. TEXTOR: 1) Augenkrankheiten, nach Beck und Chelius, wöchentlich 3mal von 3—4 Uhr; 2) Instrumentenlehre, nach Blasius, Seerig und Krombholz, mit Benützung der Instrumentensammlung der Universität, öffentlich und unentgeltlich; 3) leitet derselbe die Uebungen der Studirenden in den chirurgischen Operationen, privatissime; 4) chirurgische und Augenklinik, täglich von 10—11 Uhr im Juliushospitale.

HOFRATH UND PROFESSOR DR. MÜNZ: 1) Anatomie des Menschen, nach seinem Handbuche, wöchentlich 5mal von 11—12 Uhr; 2) Zootomie, nach Wagner's Lehrbuch der vergleichenden Anatomie, wöchentlich 4mal von 3—4 Uhr; 3) leitet derselbe die Secirübungen in der anthropotomischen und zootomischen Anstalt; 4) Repetitorium und Examinatorium über menschliche Anatomie, privatissime.

HOFRATH UND PROFESSOR DR. VON MARCUS: 1) Specielle Pathologie und Therapie, und zwar die Krankheiten des Nervensystems und die Geisteskrankheiten, wöchentlich 5mal von 7—8 Uhr; 2) syphilitische Krankheiten mit Nachweisungen am Krankenbette, wöchentlich 2mal von 11—12 Uhr; 3) Propädeutik der medicinischen Klinik in noch zu bestimmenden Stunden; 4) medicinische Klinik, täglich von 9—10 Uhr im Juliushospitale.

PROFESSOR DR. NARR: 1) Allgemeine Pathologie, nach seinen Grundzügen der allgemeinen Krankheitslehre. wöchentlich 4mal von 9—10 Uhr; 2) allgemeine Therapie, nach seinen Grundzügen der allgemeinen Heilungslehre, wöchentlich 4mal von 10—11 Uhr; 3) Kinderkrankheiten, nach Jörg u. A., wöchentlich 3mal.

PROFESSOR DR. HENSLE: 1) Physiologie, nach eigenem Plane, mit steter Beziehung auf die neuesten Fortschritte und verbunden mit den zur Erläuterung und Veranschaulichung nöthigen physiologischen Experimenten. wöchentlich 5mal von 4—5 Uhr; 2) Psychologie, physiologisch begründet, nach Hartmann, Burdach u. A., wöchentlich 2mal von 2—3 Uhr; Derselbe ist auch bereit zum Vortrage einzelner Hauptlehren der Physiologie nach eigenen Untersuchungen als Recapitulation und mit Hinweisung auf die Pathologie, namentlich des Kreislaufes und der Nervenfunctionen.

PROFESSOR DR. RINECKER: 1) Poliklinik, täglich von 12—1 Uhr; 2) Kinderklinik in Verbindung mit theoretischen Vorträgen über Kinderkrankheiten, täglich von 11—12 Uhr; 3) Klinik der Hautkrankheiten, auf dieselbe Weise. wöchentlich 3mal von 3—4 Uhr; 4) mikroskopische Histologie, verbunden mit Selbstübungen der Herren Zuhörer, nach Henle und Vogel, wöchentlich 3mal von 3—4 Uhr.

PROFESSOR DR. SCHMIDT: 1) Staatsarzneikunde, nach Henke und Nicolai, wöchentlich 3mal von 3—4 Uhr; 2) gerichtsarztliches Practicum, wöchentlich 2mal in noch zu bestimmenden Stunden; 3) Veterinärmedizin, nach Veith, wöchentlich 2mal von 3—4 Uhr.

PROFESSOR DR. ADELMANN: 1) Augenheilkunde, mit clinischer Anleitung, wöchentlich 5mal von 7—8 Uhr; 2) allgemeine Chirurgie, nach Ph. v. Walther's System der Chirurgie (2te Anfl.), wöchentlich 4mal von 5—6 Uhr; 3) (für Biennisten) über Gelenkkrankheiten, Fracturen und Luxationen.

PROFESSOR DR. SCHERER: 1) Analytische Chemie, wöchentlich 3mal; 2) analytisch-chemisches Practicum zur Untersuchung organischer und unorganischer Körper.

PROFESSOR DR. MOHR: 1) Pathologische Anatomie (als integrirenden Theil der speciellen Pathologie) nach Hasse, Rokitsky u. A., wöchentlich 5mal von 2—3 Uhr; 2) Anleitung zu Leichenöffnungen überhaupt und zu gerichtlichen Leichenöffnungen insbesondere; 3) er bietet sich derselbe zu einem Repetitorium und Examinatorium über die gesammte specielle Pathologie und Therapie.

PROFESSOR DR. HOFMANN: 1) das Theoretikum der Geburtshülfe, wöchentlich 6 Stunden; 2) den geburtshüllischen Operationscurs, wöchentlich 3 Stunden, privatissime.

PROFESSOR DR. SCHENK: 1) Allgemeine Botanik, wöchentlich 4mal; 2) medicinische Botanik, wöchentlich 4mal; 3) Repetitorium über Botanik.

PROFESSOR DR. HEINE: Experimental-Physiologie: 1) Transfusion des Blutes an Thieren von gleichem Alter und gleicher Abstammung; 2) Operationen an Leichen und ausserdem physiologische Experimente, an Thieren mit dem Osteotom. verbunden mit Selbstübungen der Zuhörer; 3) Beiträge zur Lehre von der Wiedererzeugung der Knochen, mit Nachweisung darauf bezüglicher Präparate, publice, in noch zu bestimmenden Nachmittagsstunden.

PROFESSOR DR. BERAZ: Physiologie des Menschen mit steter Anwendung der Ergebnisse des neueren Standpunctes dieser Wissenschaft auf das practische Bedürfniss des Arztes.

PRIVATDOCENT DR. SCHUBERT: Toxicologie, nach eigenen Heften, wöchentlich 2mal.

PRIVATDOCENT DR. TEXTOR: Chirurgische Anatomie, wöchentlich 2mal.

V. DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT.

PROFESSOR DR. DENZINGER liest: 1) allgemeine Geschichte der neueren Zeit, wöchentlich 5mal von 7—8 Uhr; 2) Geschichte von Deutschland, in noch zu bestimmenden Stunden.

PROFESSOR DR. FRÖHLICH: 1) Aesthetik als Philosophie der Kunst mit specieller Entwicklung der einzelnen Künste, nach eigenen Ansichten unter Hinweisung auf die Aesthetik von Grohmann, wöchentlich 5mal von 10—11 Uhr, verbunden mit einem Conversatorium am Sonnabende von 7—8 Uhr; 2) Geschichte der Kunst bei den Vorträgen über Aesthetik; 3) allgemeine Pädagogik und Didaktik, jene nach Stapf's Erziehungslehre im Geiste der katholischen Kirche, diese nach eigenen Ansichten, wöchentlich 5mal von 7—8 Uhr; 4) Geschichte der Erziehung, von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten, unter Hinweisung auf Schwarz, im Anfange der Vorträge über Pädagogik.

HOFRATH und PROFESSOR DR. OSANN: 1) den zweiten Theil der Physik und Chemie, unter Berücksichtigung der Handbücher von Müller, Pouillet, Eisenlohr und Liebig, täglich von 9—10 Uhr; 2) analytische Chemie mit practischen Uebungen, täglich in geeigneten Stunden.

PROFESSOR DR. LEIBLEIN: 1) allgemeine Naturgeschichte, und zwar den zoologisch-botanischen Theil derselben, nach eigenem Plane, mit Hinweisung auf Burmeister's Handbuch der Naturgeschichte, wöchentlich 5mal von 2—3 Uhr; 2) Zoologie, nach seinen Grundzügen einer methodischen Uebersicht des Thierreichs, wöchentlich 3mal zu gelegenen Stunden; 3) allgemeine Botanik, nach vorausgeschickter Lehre vom Baue und den Lebenserscheinungen der Pflanzen überhaupt, sowie der botanischen Systemkunde; die Uebersicht des Pflanzenreichs nach seinen Hauptabtheilungen in Familien und ihren bemerkungswerthen Gattungsrepräsentanten, nach eigenem Plane, mit Benützung der Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik von Schleiden und Bischoff's Lehrbuch der Botanik, wöchentlich 3mal; 4) medicinische Botanik, nebst Berücksichtigung der wichtigsten Culturpflanzen, mit practischen Demonstrationen an Exemplaren aus dem botanischen Garten und aus der Wildniss, nach Bischoff's medicinisch-pharmaceutischer Botanik, wöchentlich 3mal von 7—8 Uhr; 5) Anleitung zum Zergliedern und Bestimmen der Pflanzen, zu gelegenen Stunden, theils im botanischen Garten, theils auf Excursionen in der Umgegend.

PROFESSOR DR. HOFFMANN: 1) practische Philosophie, wöchentlich 5mal von 8—9 Uhr; 2) Geschichte der Philosophie an noch zu bestimmenden Tagen und Stunden.

PROFESSOR DR. RUMPF: 1) allgemeine Naturgeschichte, den mineralogischen Theil derselben, mit Berücksichtigung der Handbücher von Fuchs und Walchner, wöchentlich 3mal von 9—10 Uhr; 2) Geognosie, nach eigenem Plane, mit Hinweisung auf die Werke von Cotta, v. Leonhard und Walchner, wöchentlich 4mal von 7—8 Uhr, privatissime; 3) pharmaceutische Waarenkunde, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmakodynamik, nach Wigger's Handbuch, wöchentlich 3mal von 8—9 oder von 4—5 Uhr, privatissime.

PROFESSOR DR. LUDWIG: Allgemeine ältere Geschichte, nach eigenen Heften, mit Hinweisen auf Leo's Geschichte des Alterthums, wöchentlich 4mal von 11—12 Uhr.

PROFESSOR DR. MAYR: 1) der Elementar-Mathematik zweiten Theil, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, wöchentlich 3mal von 11—12 Uhr; 2) mathematisch-physicalische Geographie, wöchentlich 5mal von 8—9 Uhr; 3) Forstmathematik, wöchentlich 3mal von 11—12 Uhr.

PROFESSOR DR. CONTZEN: 1) allgemeine Litteraturgeschichte nach F. v. Schlegel, wöchentlich 4mal von 4—5 Uhr; 2) Statistik Bayern's, nach eigenem Plane, wöchentlich 3mal von 3—4 Uhr; 3) die historischen Hilfswissenschaften, nach Rüh's, wöchentlich 3mal in passenden Stunden.

PROFESSOR DR. REUTER: 1) römische Literaturgeschichte, wöchentlich 3mal von 7—8 Uhr; 2) Cicero de officiis lib. II et III, wöchentlich 2mal von 7—8 Uhr; 3) Demosthenes de Pace, Philipp. II et III, wöchentlich 2mal von 9—10 Uhr.

PROFESSOR DR. REUSS: 1) Geschichte der deutschen Literatur, verbunden mit deutscher Handschriftenkunde, nach Koberstein und Hoffmann, wöchentlich 2mal; 2) Erklärung der Gedichte Walther's von der Vogelweide, nach Lachmann's Ausgabe, wöchentlich 1mal zu gelegener Stunde.

Unentgeltlichen Unterricht in der *Tonkunst*, sowohl in der Instrumental- als Gesang-Musik, erhalten die Studirenden in dem musikalischen Institute.

Höhere Zeichenkunst lehrt: PROFESSOR STÖHR; *Kupferstecherkunst* BITTHÄUSER; *Reitkunst* SCHMIDT; *Fechtkunst* BÜNDGENS.

Die Universitäts-Bibliothek steht offen am Montag, Dinstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag von 9—12 Uhr, dann am Montag, Dinstag, Donnerstag und Freitag von 2—4 Uhr.

Das antiquarische Museum und das Münz-Cabinet am Samstag von 2—4 Uhr.

Das ästhetische Attribut am Samstag von 10—12 Uhr.

Das technologische Cabinet am Mittwoch von 10—12 Uhr.

Das physicalische Cabinet am Mittwoch und Samstag von 3—4 Uhr.

Die Sternwarte am Samstag von 2—4 Uhr.

Das chemische Laboratorium und die pharmaceutische Sammlung am Samstag von 10—12 Uhr.

Die zoologisch-botanische Abtheilung des Naturalien-Cabinets am Samstag von 9—11 Uhr.

Die mineralogische Abtheilung desselben am Mittwoch von 3—5 Uhr.

Der botanische Garten täglich, mit Ausnahme der Sonn- und Feiertage, von 9—11 und von 3—4 Uhr.

Die anthropotomische Sammlung am Montag von 9—12 Uhr.

Die zootomische Sammlung am Donnerstag von 9—12 Uhr.

Das chirurgische Instrumentarium am Mittwoch und Samstag von 1—2 Uhr.



Ueber die tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung.



Wenn die Grösse y eine Function der veränderlichen Grösse x ist, $y = fx$, und x um eine beliebige constante Grösse dx vermehrt wird, so zerlegt sich, wie aus dem analytischen Theile des Differenzial-Calculs hinlänglich bekannt ist, die ganze Zunahme von y , d. h. Δy , in eine Reihe wohlgeordnet aufeinanderfolgender Glieder:

$$\Delta y = f'x dx + f''x \frac{dx^2}{2} + f'''x \frac{dx^3}{2.3} + f''''x \frac{dx^4}{2.3.4} + \dots,$$

in welcher $f'x$, $f''x$, $f'''x$ u. s. w. abgeleitete, von der Grösse dx unabhängige Functionen der gegebenen Function $y = fx$ sind.

Dies lässt sich auf's Leichteste aus dem *Taylor'schen* Lehrsatz beweisen, der in allen auch noch so verschiedenen Theorien des Differenzial-Calculs gilt. Es ist nämlich allgemein:

$$\Delta y = f'x \frac{\omega}{1} + f''x \frac{\omega^2}{2} + f'''x \frac{\omega^3}{2.3} + f''''x \frac{\omega^4}{2.3.4} + \dots,$$

worin ω eine beliebige, *veränderliche* oder *constante* Zunahme von x ausdrückt. Wird daher $\omega = dx$ constant gesetzt, so geht die obige Reihe hervor:

$$\Delta y = f'x dx + f''x \frac{dx^2}{2} + f'''x \frac{dx^3}{2.3} + \dots,$$

Damit diese Reihe convergent bleibe, ist nothwendig, dass sowohl das n^{te} Glied $\frac{f^{(n)} x dx^n}{2.3 \dots n}$, als auch die Summe der n nachfolgenden Glieder für $n = \infty$ verschwinde.

Dies ist immer der Fall, wenn dx zwischen den Grenzen ($-\alpha$ und $+\alpha$) so genommen wird, dass $f^{(n)} x dx^n$ nicht selbst unendlich wird. In vielen Fällen, wenn $f^{(n)} x$ selbst eine endliche Grösse bleibt, oder unendlich klein wird, sind diese Grenzen von dx selber $+\infty$ und $-\infty$, d. h. die Reihe bleibt convergent, so gross auch dx genommen werden möge. — Vorausgesetzt wird, dass die Factoren $f'x$, $f''x$, $f'''x$ u. s. w. nicht selbst einzeln unendlich gross oder unbestimmt werden, was nur für singuläre Werthe von x eintreten kann, die darum auch nur singulär, und nicht durch die all-

gemeine *Taylor'sche* Reihe bestimmt werden können. — Gewöhnlich werden die Differenzialien dy , d^2y , d^3y etc. etc. statt der Ausdrücke $f'xdx$, $f''xdx^2$, $f'''xdx^3$ etc. gesetzt, und dann geht die Reihe in folgende über:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} + \dots,$$

wofür auch

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} dx + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{dx^3}{2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{dx^4}{2.3.4} + \dots$$

geschrieben werden kann.

Diese Reihen gelten allgemein, so lange dx nicht selbst die bestimmten Grenzen $+\alpha$ und $-\alpha$ überschreitet. Diese Grenzen sind immer, wie bereits bemerkt worden ist, *endliche* oder *unendlich grosse*, niemals aber *unendlich kleine* Grössen; es giebt daher immer unzählig viele Werthe von dx , welche die Reihe convergent machen, ohne dass einer dieser Werthe als verschwindend klein angenommen werden müsste.

Wird die veränderliche Grösse x , statt um die Grösse dx vermehrt zu werden, um dieselbe Grösse vermindert, so ist die ganze *Abnahme* der Function

$$\Delta y = dy - \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} - \frac{d^4y}{2.3.4} + \dots$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} dx - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{dx^3}{2.3} - \frac{d^4y}{dx^4} \frac{dx^4}{2.3.4} + \dots$$

Die einzelnen Glieder der beiden Reihen der Zunahme und Abnahme stimmen daher bis auf ihre Zeichen vollkommen überein, und Alles, was von den ersten Reihen gesagt worden ist, gilt auch von den zweiten Reihen der Abnahme einer Function. Da die Operationen in beiden Reihen dieselben sind, so werden wir der Kürze halber nur von den Zunahmen der veränderlichen Grössen der Functionen handeln. —

Ist die Grösse u eine Function *zweiter* von einander unabhängiger veränderlicher Grössen x und y , und werden die Grössen x und y um die beliebigen constanten Zunahmen dx , dy vermehrt, so ist die ganze Zunahme von u in Bezug auf die Vermehrungen von x und von y

$$\begin{aligned} \Delta u_{xy} = & \left(\left| \frac{du}{dx} \right| dx + \left| \frac{du}{dy} \right| dy \right) + \frac{1}{2} \left(\left| \frac{d^2u}{dx^2} \right| dx^2 + 2 \left| \frac{d^2u}{dxdy} \right| dx dy + \left| \frac{d^2u}{dy^2} \right| dy^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2.3} \left(\left| \frac{d^3u}{dx^3} \right| dx^3 + 3 \left| \frac{d^3u}{dx^2 dy} \right| dx^2 dy + 3 \left| \frac{d^3u}{dx dy^2} \right| dx dy^2 + \left| \frac{d^3u}{dy^3} \right| dy^3 \right) + \dots, \end{aligned}$$

wo $\left| \frac{du}{dx} \right|$, $\left| \frac{du}{dy} \right|$ etc. etc. die partiellen Differenzialien von u nach x und nach y ausdrücken.

Diese Reihe ist ebenfalls (die singulären Werthe der Functionen ausgenommen, die auch nicht allgemein, sondern singular bestimmt werden) für alle Werthe von dx und dy , die einzeln kleiner als ihre Grenzen $\pm\alpha$, $\pm\beta$ sind, *convergent*, und gelten allgemein, nicht bloss für unendlich kleine, sondern für beliebig grosse Werthe von dx und dy bis zu den Grenzen α und β , die öfter selber unendlich gross sein können.

Aehnliche Reihen lassen sich mit Leichtigkeit entwickeln, wenn u eine Function von *drei* oder *mehreren* veränderlichen Grössen ist, diese mögen nun von einander unabhängig, oder theilweise, oder ganz von einander abhängig sein.

Analytisch gelten daher die Gesetze des Differenzial-Calculs für beliebig grosse Werthe der Differenzialien; und nur in ihren Anwendungen auf Geometrie und Mechanik war man bisher genöthigt, entweder die Differenzialien unendlich klein zu nehmen, (was niemals Anschaulichkeit, Deutlichkeit und Bestimmtheit des Denkens geben kann), oder aber die Differenzialien ganz ausser Acht zu lassen, und mit den blossen *Differenzial-Quotienten* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. etc. zu rechnen, was niemals Klarheit und Ueberzeugung geben kann, da die geometrischen und mechanischen Grössen *wirkliche* Grössen sind, während die Differenzial-Quotienten bloss Zahlen, d. h. bloss Operationen sind. Die Differenzial-Quotienten dienen auch in der That nur *ausweichungsweise* zur Bestimmung der *wirklichen* geometrischen und mechanischen Grössen, und in dem Augenblicke, wo sie Anschaulichkeit geben wollen, kommen sie selbst auf die unendlich kleinen Grössen zurück, und müssen dadurch auch den *Schein* verlieren, als ob sie jemals im Stande sein könnten, Wirklichkeit und Anschaulichkeit zu geben. Durch dies *ausweichende* Verfahren, das ohnehin nichts anderes, als den Schein retten kann (denn dass die Differenzial-Quotienten endliche Grössen seien, dies wissen auch Diejenigen, die mit den Differenzialien selber als mit unendlich kleinen Grössen und mit wirklichen Nullen rechnen), wird die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Geometrie und Mechanik ausserordentlich erschwert. Die wahren Schwierigkeiten werden nicht überwunden, sondern dem *offenen* Differenzial-Calcul, der mit unendlich kleinen Grössen rechnet, überlassen; das ausweichende Verfahren kömmt nur nach, um auf eigene Weise zu zeigen, dass die materiellen Schwierigkeiten bereits überwunden seien. Dies ist in noch höherem Maasse bei der Anwendung des Differenzial-Calculs auf Physik und Naturforschung überhaupt der Fall.

I.

Differenzialien der ebenen Curven und der von ihnen abhängigen Functionen.

Da die Differenzialien *analytisch* genommen wirklich endliche und beliebig grosse Grössen sind, so entsteht die Aufgabe, dass sie auch in ihren Anwendungen auf geometrische und mechanische Grössen als solche gezeigt und bewiesen werden, was ohne alle Schwierigkeit geschehen kann. — In einer früher erschienenen Schrift (Theorie des Differenzial-Calculs) habe ich von den Differenzialien der ersten Reihe:

$$\Delta y = dy + \frac{a^2 y}{1.2} + \frac{d^2 y}{1.2.3} + \frac{d^3 y}{1.2.3.4} + \dots$$

nachgewiesen, welche bestimmte Grössen sie seien, wenn y und x geometrische Grössen sind. Allgemein ist dy das erste, $\frac{d^2 y}{1.2}$ das zweite, $\frac{d^3 y}{1.2.3}$ das dritte Glied etc. etc. der allgemeinen Zunahme Δy ; geometrisch sind sie aber bestimmte geometrische Grössen, die von denjenigen geometrischen Grössen abhängen, die für x und y gesetzt werden.

Da die Tangente selbst eine tangirende Parabel erster Ordnung ist, so ist das erste Differenzial der Ordinate gleich go , (gleich der Zunahme der neuen Ordinate bis zur tangirenden Parabel erster Ordnung); es ist das zweite Differenzial der Ordinate ($d^2y=2.\frac{d^2y}{2}$) gleich der Linie $2ng$ (gleich der doppelten Zunahme der neuen Ordinate von der tangirenden Parabel erster Ordnung bis zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung); es ist das dritte Differenzial der Ordinate ($d^3y=2.3.\frac{d^3y}{2.3}$) gleich der Linie $2.3.nr$ (gleich der sechsfachen Zunahme der neuen Ordinate von der tangirenden Parabel zweiter Ordnung bis zur tangirenden Parabel dritter Ordnung) u. s. w.

Die Summe aller dieser geraden Linien $go+ng+nr+..$ (mit positiven oder negativen Zeichen genommen, wie es die jedesmalige Rechnung und Construction giebt), giebt endlich die ganze Zunahme Δy der neuen Ordinate, oder der Linie so , so dass

$$so=go+ng+nr+...,$$

so gross oder so klein auch $mh=dx$ genommen werden möge.

So ist z. B., wenn cm die gegebene Curve, $c1$ die Tangente und $c2, c3, c4..$ die tangirenden Parabeln der zweiten, dritten, vierten Ordnung darstellen, $dy=av$, $d^2y=2vr$, $d^3y=2.3.or$; $d^4y=2.3.4.on$ u. s. w. $\Delta y=ma$, und

$$\Delta y=dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{2.3}d^3y+\frac{1}{2.3.4}d^4y+..$$

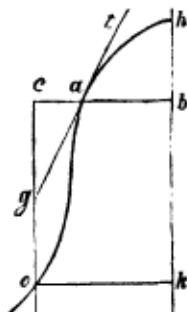
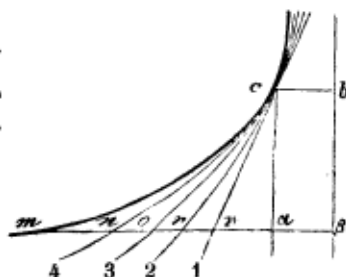
oder

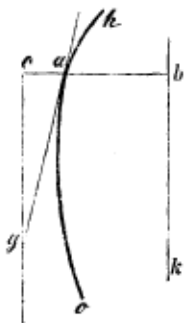
$$ma=va+rv+or+no+..$$

Es ist nicht nothwendig, dass gerade aus der beliebigen Zunahme der Abscissen die Differenzialien der Ordinaten bestimmt werden, es können auch umgekehrt die Differenzialien der Abscissen aus den beliebigen Zunahmen der Ordinaten bestimmt werden, nach der Reihe:

$$\Delta x=dx+\frac{d^2x}{2}+\frac{d^3x}{2.3}+...$$

Ist z. B. hao eine gegebene Curve, und wird die Ordinate ab um eine beliebige Grösse ac vermehrt, so ist die ganze Zunahme der Abscisse, oder Δx , gleich der geraden Linie co , und das erste Differenzial, oder dx , ist gleich der geraden Linie cg , d. h. derjenigen geraden Linie, die zwischen den Punkten c und g liegt, wenn tag die Tangente der gegebenen Curve im Punkte a ist. — Auf ganz gleiche Art können die zweiten, dritten und höheren Differenzialien der Abscissen durch tangirende Parabeln zweiter, dritter und höherer Ordnungen construirt werden. Ihre Summe (oder theilweise Differenz) ist gleich der ganzen Zunahme Δx , so gross auch dy innerhalb der Grenze α genommen werden möge.





Würde z. B. bei der Curve *hao* die beliebige Zunahme *ac* der Ordinate *ab*, so genommen, dass *cg* die Curve *hao* niemals durchschneide, so würde $\Delta x = \infty$. Analytisch würde sich ergeben, dass die Reihe:

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{2.3} + \frac{d^4x}{2.3.4} + \dots$$

für diesen Werth von *dy* divergent würde; und nur unter der Bedingung convergiren könnte, dass die beliebige Zunahme der Ordinate, *dy*, innerhalb einer bestimmten Grenze α genommen würde.

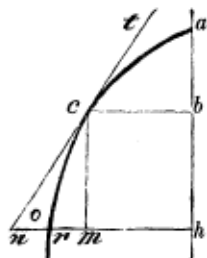
Diese Grenze ist jederzeit (die singulären Punkte ausgenommen) eine *endliche* Grösse. So stimmen Analysis und geometrische Anwendung auf's Vollkommenste überein; was in der Analysis eine divergente Reihe gibt, das kann in der Geometrie keine endliche Grösse geben; die Curve und die mit der Abscissenlinie parallele Linie *cg* können sich in dem gegebenen Falle niemals durchschneiden.

Diejenigen Werthe von *x* oder *y* hingegen, die in der analytischen Reihe:

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{2.3} + \frac{d^4x}{2.3.4} + \dots$$

einzelne Glieder gleich Null, oder unendlich gross machen, diese müssen in der geometrischen Anwendung singuläre Punkte der Curve geben (Inflexionspunkte, vorspringende, schliessende, rückkehrende Punkte u. s. w.), die eben, weil sie singulär sind, auch singulär und nicht durch die allgemeine Reihe bestimmt werden müssen. So hat Alles sein Gutes. Wird die allgemeine Reihe unbrauchbar, so ist es ein Zeichen, dass singuläre Werthe und Punkte zu bestimmen seien, auf die man nicht kommen könnte, wenn nicht die Singularität der allgemeinen Reihe für diese Werthe auf sie hinweisen würde.

II. Ist in der Function $z=f(x)$ *z* der Bogen und *x* z. B. die Abscisse einer Curve, so ist Δz die ganze Zunahme des Bogens, und dx , $\frac{d^2z}{2}$, $\frac{d^3z}{2.3}$ etc. sind die ein-



zelnen Glieder dieser Zunahme, wenn *dx* eine beliebige Zunahme von *x* ist. Die ganze Zunahme ist offenbar eine Curve, nämlich derjenige Theil des Bogens, der zwischen den Abscissen *x* und $x+dx$ liegt; die einzelnen Differenzialien aber sind *gerade Linien*, und die Summe dieser geraden Linien giebt den Bogen, so gross oder so klein auch *dx* genommen werden möge. So ist, wenn $x=ab$, $dx=bh$ gesetzt wird, Δz gleich dem Bogen *cor*, aber das erste Differenzial *dx* ist gleich der geraden Linie *cn*, d. h. gleich demjenigen Theile der Tangente, der zwischen den Ordinaten *y* und $y+dy$ (*cb* und *nh*) liegt, so gross auch *bh* innerhalb der Grenze $dx=\alpha$ genommen werden möge.

Da die Linie *cn* geometrisch aus $cm=dx$ und $nm=dy$ bestimmt werden kann, $dx=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, so ist analytisch $d^2z=\frac{dyd^2y}{dx}$, und da d^2y schon aus den Differenzialien der Ordinate bekannt ist, ($d^2y=2ng$), wenn die Curve *bay* die tangirende Parabel zweiter Ordnung im Punkte *a* ist, so ist d^2z die vierte Proportionale zu den

Linien dx , dy , d^2y , d. h. zu den Linien ag , pg , $2ng$, oder $\frac{1}{2}d^2x$ gleich der Linie **hg**, wenn hu senkrecht auf ag steht.

Ferner ist

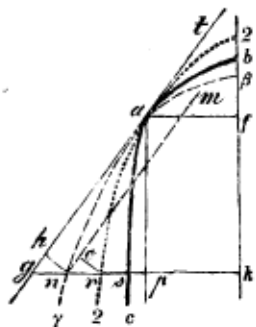
$$\frac{1}{2.3}d^3x = \frac{1}{2.3} \frac{dyd^2y}{dx} + \frac{1}{2.3} \left(\frac{dxd^2y}{dx} \right)^2 \frac{1}{dx}$$

und da d^3y aus der tangirenden Parabel dritter Ordnung be-

kannt ist, nämlich $\frac{1}{2.3}d^3y = nr$, so ist: $\frac{1}{2.3} \frac{dyd^2y}{dx}$ gleich der ge-

raden Linie **no**, wenn ro auf mn senkrecht und mn parallel

mit ag gezogen wird. Ebenso kann die gerade Linie $\frac{1}{2.3} \left(\frac{dxd^2y}{dx} \right)^2 \frac{1}{dx}$ aus der tangirenden Parabel zweiter Ordnung geometrisch construirt werden. Es ist nämlich $\frac{dxd^2y}{dx} = 2hn$, also $\frac{1}{2.3} \left(\frac{dxd^2y}{dx} \right)^2 \frac{1}{dx} = \frac{1}{2.3} \cdot 4 \cdot \frac{(hn)^2}{dx} = \frac{2}{3} \frac{(hn)^2}{ag}$, und $\frac{(hn)^2}{ag}$ ist gleich der dritten Proportionallinie zu den Linien ag und hn . Dies ist ebenfalls eine endliche und construierbare gerade Linie **s**.



Auf ähnliche Weise werden die vierten, fünften und nachfolgenden Differenzialien des Bogens construirt. Sie sind sämmtlich gerade Linien, und ihre theilweise Summe oder Differenz giebt in einer endlichen oder unendlichen Reihe genau die Zunahme des Bogens dx , also den Bogen as , so gross oder so klein auch die Grösse $dx = fk$ innerhalb der Grenzen der Convergenz der Reihen genommen werden möge.

Es zerlegt sich demnach die ganze Zunahme des Bogens in eine endliche oder unendliche Reihe gerader Linien, die sämmtlich ihrer Lage und Grösse nach geometrisch construirt werden können. — Das ist aber nicht das Wichtigste. Das Bewunderungswürdige ist, dass man diese einzelnen geraden Linien, diese aufeinanderfolgenden Differenzialien des Bogens sämmtlich, ohne den Bogen selbst zu kennen, aus den bekannten Differenzialien der Ordinate und Abscisse construiren, dass man also aus der gegebenen Coordinaten-Gleichung den Bogen und umgekehrt aus dem gegebenen Bogen die Coordinaten-Gleichung ableiten kann. Denn es ist das erste Differenzial des Bogens geometrisch $ag = \sqrt{ap^2 + pg^2}$, oder $dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, woraus sich das wichtige Resultat ergibt, dass man aus dem Differenzial des Bogens, das geometrisch aus den Differenzialien der Abscisse und der Ordinate bestimmt wird, durch analytische Integration den Bogen selbst findet. Es folgt nämlich aus

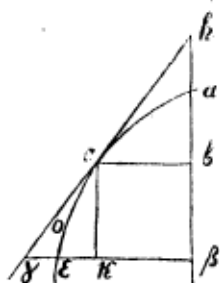
$$dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad x = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + C.$$

Wäre aber der Bogen z. B. als Function der Abscisse gegeben, und die Coordinaten-Gleichung unbekannt, so folgte aus $dx^2 = dx^2 + dy^2$ auch $dy^2 = dx^2 - dx^2$, $dy = dx \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2} - 1\right)}$, also $y = \int dx \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2} - 1\right)} + C$; woraus die Gleichung zwischen der Ordinate und Abscisse gefunden werden kann.

Es können daher schon durch das erste Differenzial die Functionen der Coordinaten

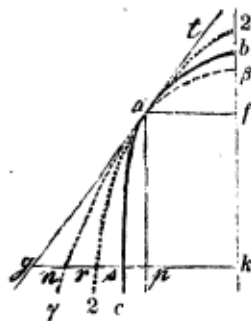
und des Bogens in einer allgemeinen, für alle Curven gültigen Formel aus einander abgeleitet werden.

Die Thatsache ist folgende: Die verschiedenen Functionen, die bei Curven bestimmt werden sollen, beruhen zum Theil odér ganz auf Bestimmung krummer Linien, bei denen die niedere Geometrie nichts ausrichten kann. Aber die Differenzialien der Curven führen durchaus auf gerade Linien (oder Kreisbogen bei den Polar-Coordinationen), und diese können durch die niedere Geometrie vollkommen und leicht bestimmt werden. Daraus werden Gleichungen gebildet, deren Auflösung durch Integration Sache der Analysis ist; die Schwierigkeiten sind nicht mehr Schwierigkeiten der Theorie, sondern des Calculs. Auch hat die Analysis ganz andere Hilfsmittel zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten, als die vereinzelt geometrischen Elemente, in denen Theorie und Calcul noch ungesondert sind.



III. Ist die Function $\varphi=f(x)$ gegeben, und drückt φ die von den Abscissen, den Ordinaten und der Curve eingeschlossene Ebene aus, z. B. die Ebene acb , so ist die ganze Zunahme der Fläche, $\Delta\varphi$, wenn z. B. $dx=b\beta$ gesetzt wird, die Ebene $bco\epsilon\beta$, die von drei geraden Linien, cb , $b\beta$, $\beta\epsilon$, und von dem Bogen $co\epsilon$ begrenzt wird. Was sind aber die einzelnen Glieder dieser ganzen Zunahme, $d\varphi$, $\frac{d^2\varphi}{2}$, $\frac{d^3\varphi}{2.3}$ u. s. w.? Sie sind *ebene Figuren, die sämmtlich von geraden Linien begrenzt werden*, so gross auch dx innerhalb der Grenzen der Convergenz der Reihe genommen werden möge.

Und zwar ist $d\varphi$ gleich dem Rechtecke $bck\beta$ (obige Figur). Da dieses Rechteck gleich: $cb.b\beta=ydx$ ist, so können die nachfolgenden Differenzialien der Fläche φ auf's Leichteste construiert werden. Es ist nämlich $d^2\varphi=d(ydx)=dydx$. Aber dy ist aus den Differenzialien der Ordinaten als die Linie pg bekannt,



und es ist $\frac{1}{2}d^2\varphi$ gleich dem Drèiecke apg . — Ebenso ist

$\frac{1}{2.3}d^3\varphi=\frac{1}{2.3}d^2ydx$, und da $\frac{1}{2}d^2y$ aus den Differenzialien der

Ordinaten als die Linie gn bekannt ist, so ist $\frac{1}{2}d^2ydx$ ein Rechteck

aus der Linie dx und der Linie $\frac{1}{2}d^2y$, und $\frac{1}{2.3}d^2ydx$ ist der

dritte Theil dieses Rechtecks $=\frac{1}{3}ap.gn$. Eben so ist $\frac{d^4\varphi}{2.3.4}=\frac{d^3ydx}{2.3.4}$;

und da $\frac{d^3y}{2.3}$ eine Linie ist, die aus den Differenzialien der Ordinaten als die Linie nr

bekannt ist, so ist $\frac{d^4y}{2.3.4}$ der vierte Theil des Rechtecks zwischen den Linien $\frac{d^3y}{2.3}$ und

dx , d. h. gleich dem vierten Theile des Rechtecks $nr.ap$ u. s. w.

Es ist daher die Ebene $Ay=fask$ die Summe von endlich oder unendlich vielen Rechtecken, also von Figuren, die von geraden Linien begrenzt sind, so gross auch dx genommen werden möge.

Das Wichtigste ist dabei wieder, dass der Flächen-Inhalt dieser von geraden-Linien begrenzten Figuren auf's Leichteste geometrisch bestimmt werden kann. So ist das Viereck $afkp=ydx$, das Dreieck $gap=\frac{1}{2}dydx$ u. s. w. Dadurch sind Gleichungen zwischen den Differenzialien der Fläche und den Coordinaten und ihren Differenzialien gegeben. Die Bildung dieser Gleichungen fällt ganz der geometrischen Betrachtung anheim. Sind aber einmal die Gleichungen gebildet, z. B. $d\varphi=ydx$, so ist das fernere Geschäft rein analytisch, und es können durch Integration die Flächen aus den gegebenen Coordinaten-Gleichungen und umgekehrt diese aus den gegebenen Flächen auf's Leichteste gefunden werden.

Also schon durch das erste Differenzial der Fläche kann der Flächen-Inhalt einer Curve aus ihrer gegebenen Coordinaten-Gleichung gefunden werden.

Das Verfahren bei der Herstellung dieser Resultate verdient besonders hervorgehoben zu werden. Es sind geometrische Grössen, z. B. Flächen, aus ihren Coordinaten-Gleichungen zu bestimmen. Sie sind wohl als Probleme gegeben, aber man kann sie nicht unmittelbar auflösen. Darum geht man zu ihren Differenzialien über. Diese sind einfache, von geraden Linien begrenzte Figuren, und können auf's Leichteste bestimmt werden. So ist z. B. das erste Differenzial der Fläche nicht grösser und nicht kleiner, als das Rechteck zwischen der Ordinate und der willkürlichen Zunahme der Abscisse. Diess Rechteck ($d\varphi$) kann nun auf den analytischen Ausdruck gebracht werden, $d\varphi=ydx$; und wird dieser Ausdruck integrirt, so wird die gesuchte Fläche selbst gefunden. Es ist $\varphi=\int ydx+C$. — So wird klar, wie aus der bekannten Coordinaten-Gleichung und dem Differenzial $d\varphi=ydx$, die Fläche selbst, oder wie aus der bekannten Fläche, wo also mit φ auch das Differenzial $d\varphi$ bekannt ist, die Gleichung zwischen y und x selbst durch Integration bestimmt werden könne. Ist diese bestimmt, so sind auch die andern Functionen der Tangente, der Normale, der Evolute u. s. w. durch die Fläche, und umgekehrt diese durch jene bestimmbar. Dies gibt einen durchgreifenden Parallelismus zwischen analytischem Calcul und geometrischer Construction.

Geometrische Grössen können nicht ohne geometrische Betrachtungen auf Gleichungen und analytische Ausdrücke gebracht werden. Es ist daher blosser Redensart, wenn gesagt wird, dass Resultate, wie der Ausdruck des Differenzials der Fläche $d\varphi=ydx$, ohne Geometrie, rein analytisch gefunden werden. Es ist zwar einleuchtend, dass man diese Gleichung auch ohne sichtbar verzeichnete Figur herstellen kann, aber darum ist die Figur doch nicht innerlich, im Gange des Beweises entbehrt worden. — Würde sich die ganze Zunahme der Fläche in der Reihe der einzelnen Differenzialien nicht in solche Flächen zerlegen, die unmittelbar aus den sie begrenzenden Linien bestimmt werden könnten; d. h. würden diese Flächen nicht sämmtlich von geraden Linien begrenzt, so wäre es nicht möglich, adäquate Gleichungen der Differenzial-Ausdrücke zu bilden; und die gegenseitige Reduction der Coordinaten-Gleichungen, der Flächen, der Bogen, der Tangenten u. s. w. würde nicht stattfinden können.

Dies ist die erfolgreichste Thatsache der Differenzirung, dass sich alle krumme Linien in ihren Differenzialien in gerade Linien (oder Kreisbogen), und alle Flächen in Ebenen, die von geraden Linien (oder Kreisbogen) umschlossen sind, zerlegen, so dass die analytischen Gleichungen dieser geometrischen Grössen auf's Leichteste bestimmt werden können.

Mit derselben Leichtigkeit können die aufeinanderfolgenden Differenzialien der Sektoren, der Rotations-Oberflächen und der Rotations-Körper geometrisch construirt und auch ihrer Grösse nach berechnet werden. Sie sind sämmtlich endliche, berechenbare und construirbare Grössen. Ich habe in der oben angeführten Schrift in Beispielen berechnet, wie gross z. B. die Differenzialien der Ordinaten dy , d^2y , d^3y u. s. w. seien, wenn für x und dx bestimmte endliche Werthe gesetzt werden. Die Sache ist ausserordentlich leicht. Wird z. B. $y^2=px$ gesetzt, $dx=p$, $x=p$ genommen, so ist $d^2y=-\frac{1}{4}p$. Es ist auch nur geschehen, damit Diejenigen, die in dem Glauben

an die unendliche Kleinheit der Differenzialien befangen sind, durch geometrische Anschauung und durch analytische Zahlen-Resultate zur Wahrheit befreit werden möchten.

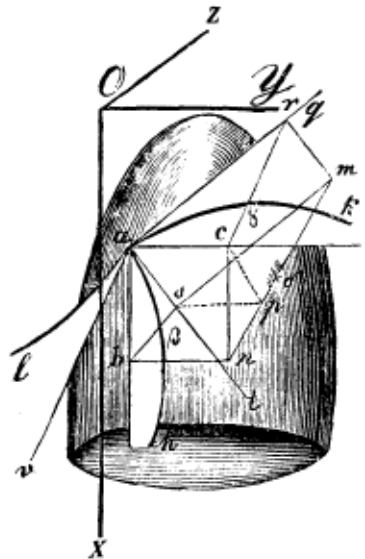
In der gegenwärtigen Untersuchung werde ich den Differenzial-Calcul auf die *Flächen* anwenden, und zu zeigen versuchen, welche *wirkliche* Grössen die bei den Flächen vorkommenden *totalen* und *partialen* Differenzialien und die von ihnen abhängigen Grössen seien, damit sie mit Augen gesehen und ihrer Lage und Grösse nach construirt werden können. Dabei wiederhole ich, dass der Differenzial-Calcul auf Geometrie nur angewendet, nicht aber auf Geometrie gegründet wird. Es sollen nur die analytischen Resultate des Differenzial-Calculs in ihren Anwendungen auf Geometrie (und Mechanik) vor der Zurücksetzung auf unendlich kleine Grössen bewahrt werden. Sie werden ja bereits analytisch als wirkliche, endliche Grössen behandelt, und es wird wohl kaum mehr einen Mathematiker von Bedeutung geben, der die *analytischen* Formeln des Differenzial-Calculs auf unendlich kleine Grössen gründen wollte, da *La Grange* in seiner Functionen-Theorie schon lange auf dem rechten Wege der Auffindung der *analytischen* Resultate des Differenzial-Calculs vorangegangen ist. Sind aber die Differenzialien, analytisch betrachtet, endliche und beliebig grosse Grössen, so müssen sie auch als geometrische (und mechanische) Grössen *endliche* Grössen sein. Die Schwierigkeit wird nur darin bestehen, nicht dass sie endliche Grössen seien, sondern dass sie als endliche Grössen erkannt und nachgewiesen werden. Weil man sie nicht als solche nachweisen konnte, hat man sich unter den unbestimmten Begriff der unendlich kleinen Grössen geflüchtet, ein Begriff, der weder deutlich, noch anschaulich gemacht werden kann. Ist man aber im Stande, die Differenzialien als endliche geometrische und mechanische Grössen nachzuweisen, so hat man allerdings auch für die analytischen Probleme neue Anhaltspunkte, da in jeder Wissenschaft ein Fortschritt in dem einen Zweige auch einen Fortschritt in den andern Zweigen bewirken oder veranlassen muss; es sind zweifache Elemente für die Auffassung und Lösung der geometrischen Fragen an die Hand gegeben, wodurch das Verständniss der Probleme nicht bloss um das Doppelte, sondern um das Vielfache erleichtert und verbessert wird.

III.

Differenzialien der Coordinaten der Flächen.

1. Die ersten Differenzialien.

Lehrsatz. Es sei a ein Punkt einer gegebenen Fläche. Wird diese Fläche durch eine mit der Coordinaten-Ebene XZ parallele Ebene durchschnitten, so giebt sie als Durchschnittslinie eine ebene Curve ah , und ast sei die Tangente dieser Curve im Punkte a . Wird die Fläche durch eine mit der Coordinaten-Ebene YZ parallele Ebene durchschnitten, so giebt sie als Durchschnittslinie eine ebene Curve ak , und arq sei die Tangente dieser Curve im Punkte a .



Wenn die willkürlichen Zunahmen dx und dy einzeln gleich ab und ac genommen, und in der Ebene tab die Linie bs senkrecht auf b , in der Ebene rac die Linie rc senkrecht auf c gezogen werden, so sind bs und cr die Verlängerungen der Ordinate z bis zu ihren jedesmaligen Tangenten, also (wie aus den ebenen Curven bekannt ist) die ersten Differenzialien der Ordinaten z , oder $bs=dx_z$ (in Beziehung auf x), $cr=dz_y$ (in Beziehung auf y), oder $bs=dz_x=\frac{dz}{dx}dx$; $cs=dz_y=\frac{dz}{dy}dy$. Wenn ferner die Rechtecke $bacn$ und $sarm$ in den Ebenen bac und sar gebildet, und die Punkte m und n durch eine Gerade verbunden werden, so steht die gerade Linie mn senkrecht auf der Ebene $bacn$, welche mit der Coordinaten-Ebene XY parallel ist, und die Linie mn ist das ganze erste Differenzial von z in Beziehung auf x und auf y , oder $mn=dz=dz_x+dz_y=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=bs+cr$. — Endlich ist die durch die beiden Tangenten as und ar gelegte Ebene, von der das Rechteck $sarm$ ein Theil ist, die tangirende Ebene der Fläche im Punkte a , d. h. die Ebene $sarm$ hat mit der gegebenen Fläche den Punkt (x, y, z) oder a gemeinschaftlich, und es kann zwischen ihr und der gegebenen Fläche im Punkte a keine andere Ebene gelegt werden, die in beliebig nahen Entfernungen vom Punkte a näher an der gegebenen Fläche läge, als die Ebene $sarm$ selbst. Diese Sätze werden der Reihe nach einzeln bewiesen.

1) Die Linie bs ist das partielle Differenzial von z in Bezug auf x .

Beweis. Die Curve ah hat zu ihren Coordinaten die Linien x und z . Denn da die Ebene hab parallel mit XZ , also senkrecht auf Y gezogen ist, so sind für alle Punkte dieser Curve die Coordinaten y constante Grössen. Nun ist aus der Theorie der ebenen Curven bekannt, dass die Verlängerung zur Tangente oder bs das erste Differenzial der Ordinate z ist. Wird daher z als Function von x und y ; $z=f(x, y)$

genommen, und y als constante Grösse k behandelt, so ist $dx = bs$. Bei partiellen Differenzirungen wird aber auch y als constant genommen, wenn bloss noch x differenzirt wird; es ist daher $dx = dz$, oder $dx = bs$. — Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, dass $rc = dz$ sei.

2) Die Linie mn steht senkrecht auf der Ebene $bacn$, welche Ebene mit XY parallel ist. Denn gleiche und parallele Linien im Raume haben gleiche und parallele Projectionen. Da nun ar und sm gleich und parallel sind, und ac die Projection von ar ist, so muss die Projection von sm gleich bn sein. Denn die Senkrechte vom Anfangspunkt s auf die Ebene $bacn$ trifft auf b , und da durch b nur eine Linie bn mit ac parallel gezogen werden kann, so ist $bn = ac$ die Projection von sm . Da n der Endpunkt der Projection entsprechend dem Endpunkte der Linie sm ist, so ist mn eine projectirende Gerade, also senkrecht auf $bacn$.

3) Die Linie mn ist das totale Differenzial von z .

Beweis. Da $mn = np + pm = bs + cr$; und: $bs + cr = dx + dz$, so ist $mn = dx + dz = dz$, was zu beweisen war.

Zusatz. Ist a der Punkt x, y, z , so ist b der Punkt $(x+dx, y, z)$, c der Punkt $(x, y+dy, z)$, n der Punkt $(x+dx, y+dy, z)$. Wird daher im Punkte n $(x+dx, y+dy, z)$ eine Linie mn senkrecht errichtet, und so weit verlängert, bis sie die tangirende Ebene im Punkte m schneidet, so ist diese Linie mn , die Verlängerung zur tangirenden Ebene, gleich dz , so gross oder so klein auch dx und dy genommen werden mögen. Der Punkt δ , in welchem die Linie mn die gegebene Fläche durchschneidet, ist der Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$, und der Punkt m selbst ist der Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$.

4) Die Gleichung der durch die beiden Tangenten ta und qa gelegten Ebene taq wird auf folgende Art gefunden:

$$\text{Es sei: } A\xi + B\eta + C\zeta = K \quad (\alpha)$$

die Gleichung dieser Ebene; ξ, η, ζ seien ihre Coordinaten. Da diese Ebene durch die drei Punkte a, s, r , oder durch die Punkte (x, y, z) , $(x+dx, y, z+dz)$, $(x, y+dy, z+dz)$ geht, so gelten auch die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz = K \quad (\text{I.})$$

$$A(x+dx) + By + C(z+dz) = K \quad (\text{II.})$$

$$Ax + B(y+dy) + C(z+dz) = K \quad (\text{III.})$$

Die Gleichungen (I.) und (II.) geben $A dx + C dz = 0$ $\frac{A}{C} = -\frac{dz}{dx}$

Die Gleichungen (I.) und (III.) geben: $B dy + C dz = 0$ $\frac{B}{C} = -\frac{dz}{dy}$

Ist nun $u = 0$ die Coordinaten-Gleichung einer Fläche, so gelten die Gleichungen:

$$\left| \frac{du}{dx} \right| dx + \left| \frac{du}{dz} \right| dz = 0 \quad \left| \frac{du}{dy} \right| dy + \left| \frac{du}{dz} \right| dz = 0.$$

Es ist aber

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\left| \frac{du}{dx} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|}; \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{\left| \frac{du}{dy} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|},$$

folglich auch

$$\frac{A}{C} = \frac{\left| \frac{du}{dx} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|}; \quad \frac{B}{C} = \frac{\left| \frac{du}{dy} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|}.$$

Da nun die Gleichungen (α) und (I.) die eine Gleichung

$$\frac{A}{C}(x-\xi) + \frac{B}{C}(y-\eta) + (z-\zeta) = 0$$

geben, so ist die Gleichung der tangirenden Ebene *taq* folgende:

$$\left| \frac{du}{dx} \right| (x-\xi) + \left| \frac{du}{dy} \right| (y-\eta) + \left| \frac{du}{dz} \right| (z-\zeta) = 0.$$

5. Wird die Ebene *abcn*, die senkrecht auf **Z** steht, verlängert, bis sie die Fläche in der Curve *al* durchschneidet, so liegt die Tangente *av* dieser Curve ebenfalls in der Ebene *taq* oder in ihrer Verlängerung.

Beweis. Ein Punkt dieser Tangente ist der Punkt $(x+dx, y+dy, z)$. Wenn daher die Gleichung

$$\left| \frac{du}{dx} \right| (x-\xi) + \left| \frac{du}{dy} \right| (y-\eta) + \left| \frac{du}{dz} \right| (z-\zeta) = 0$$

so umgeformt werden kann, dass der Punkt $(x+dx, y+dy, z)$ in ihr liegt, so liegt die ganze Tangente *av* in ihr, da jener Punkt wegen der willkürlichen Grösse von *dx* unzählig viele Punkte¹ der Tangente darstellt.

Wird obige Gleichung der Ebene *taq* in folgende umgeformt:

$$\frac{\left| \frac{du}{dx} \right|}{\left| \frac{du}{dy} \right|} (x-\xi) + \frac{\left| \frac{du}{dz} \right|}{\left| \frac{du}{dy} \right|} (z-\zeta) + y-\eta = 0$$

so wird sie:

$$-\frac{dy}{dx} (x-\xi) - \frac{dy}{dz} (z-\zeta) + (y-\eta) = 0$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{A}{B} = - \frac{dy}{dx}, \text{ und } \frac{C}{B} = - \frac{dy}{dz}$$

und dass die beiden Gleichungen stattfinden:

$$A dx + B dy = 0, \quad C dz + B dy = 0$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (I.) geben:

$$A(x+dx)+B(y+dy)+Cz=K \quad (m)$$

$$Ax+B(y+dy)+(x+dx)=K \quad (n)$$

Die Gleichung (m) zeigt nun, dass der Punkt $(x+dx, y+dy, z)$ in der Ebene taq oder in ihrer Verlängerung liegt, was zu beweisen war.

Zusatz. In der Ebene taq liegen also die drei Tangenten der ebenen Durchschnittscurven ah , ak und al ; und durch welche zwei dieser Tangenten die Ebene bestimmt werden möge, es erfolgt immer dieselbe Ebene.

6) Diese Ebene ist die tangirende Ebene der Fläche im Punkte a .

Beweis. Gesetzt, eine andere Ebene E habe die Eigenschaft, tangirende Ebene der Fläche zu sein, so wird in dieser Ebene E nur eine der gefundenen Tangenten, z. B. at , liegen können. Denn lägen zwei Tangenten in ihr, so würde die angenommene Ebene E mit der tangirenden Ebene, mit der sie zwei gerade Linien gemeinschaftlich hätte, selbst zusammenfallen. Die Durchschnitte dieser Ebene mit den Ebenen rac und vab müssten also von den Tangenten ar und av verschieden sein. Wären diese Linien näher an den Curven ak und al , so wären sie beliebig nahe bei a , an den Curven näher, als die Tangenten, was nach der Theorie der ebenen Curven unmöglich ist. Sie sind also entfernter, als die Tangenten. Daraus folgt, dass die Ebene E selbst von der Fläche im Punkte a entfernter sei, als die Ebene taq , da die Curven ak und al in der gegebenen Fläche liegen. Es kann daher keine andere Ebene gedacht werden, die zwischen der Fläche und der Ebene taq gezogen werden könnte. Diese Ebene ist also selbst die tangirende Ebene, und die gefundene Gleichung:

$$\left|\frac{du}{dx}\right|(x-\xi)+\left|\frac{du}{dy}\right|(y-\eta)+\left|\frac{du}{dz}\right|(z-\zeta)=0$$

ist die Gleichung der tangirenden Ebene.

Zusatz 1. Es ist einleuchtend, dass man dieselben Resultate erlangen würde, wenn man, statt z als Function von x und y zu nehmen, x als Function von y und z , oder y als Function von x und z nehmen würde. Je zwei Coordinaten haben willkürliche Zunahmen; wenn aber diese gewählt oder beliebig gross genommen sind, so ist die Zunahme der dritten Coordinate veränderlich, und zerlegt sich in die Reihe der Differenzialien. Ihre ganze Zunahme ist die Verlängerung der Ordinate, z. B. z , bis sie die Fläche durchschneidet; das erste Glied dieser Zunahme aber ist ihre Verlängerung, bis sie die tangirende Ebene durchschneidet. — Ausser der geometrischen Bedeutung des ganzen ersten Differenzials haben sich auch die geometrischen Bedeutungen und Grössen der partiellen ersten Differenzialien der Ordinaten herausgestellt.

Zusatz 2. Die Sätze, in denen die Differenzialien der Coordinaten der Flächen der Reihe nach bewiesen werden, gelten allgemein, so lange die Flächen allseitig continuirlich bleiben, wie diess bei allgemeinen Beweisen überhaupt vorausgesetzt wird. Die Untersuchungen über die singulären Punkte der Flächen müssen, wie sich von selbst versteht, auch besonders geführt werden.

2. Die zweiten Differenzialien der Coordinaten der Flächen.

Um das zweite Differenzial der Coordinaten einer Fläche geometrisch bestimmen zu können, müssen wir eine solche Fläche als bestimmende wählen, deren ganze Zunahme durch die beiden ersten Differenzialien vollständig gegeben ist. Diese Fläche ist, wenn z. B. z als Function von x und y genommen wird, allgemein folgende:

$$z' = \alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta x'^2 + \kappa x' y' + \lambda y'^2 \quad (\text{II.})$$

Denn werden x' und y' als unabhängige Veränderliche genommen, so dass dx und dy constant sind, so ist:

$$dz' = dz + \frac{1}{2} d^2 z'$$

eine endliche Reihe, da alle folgenden Differenzialien von z' gleich Null werden.

Es finden dann folgende Gleichungen statt:

$$dz' = \left| \frac{dz'}{dx'} \right| dx' + \left| \frac{dz'}{dy'} \right| dy' = (\beta + 2\delta x' + \kappa y') dx' + (\gamma + \kappa x' + 2\lambda y') dy'$$

$$d^2 z' = \left| \frac{d^2 z'}{dx'^2} \right| dx'^2 + \left| \frac{2d^2 z'}{dx' dy'} \right| dx' dy' + \left| \frac{d^2 z'}{dy'^2} \right| dy'^2 = 2\delta dx'^2 + 2\kappa dx' dy' + 2\lambda dy'^2.$$

Da nun Az' als die Verlängerung der Ordinate z an die Fläche (II.), und dz' als die Verlängerung der Ordinate an die tangirende Ebene bekannt ist, so ist auch die Grösse $\frac{1}{2} d^2 z'$ bekannt; sie ist die Differenz der Verlängerungen von z an die tangirende Fläche zweiter Ordnung und an die tangirende Ebene.

Seien nun die Coordinaten der gegebenen Fläche x, y, z . Werden

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad dx = dx', \quad dy = dy', \quad dz = dz'$$

und

$$\frac{d^2 z'}{dx'^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dx' dy'} = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

genommen, so sind die zweiten Differenzialien von z durch die zweiten Differenzialien von z' bestimmt. Es sind also die zweiten Differenzialien der Coordinaten jeder Fläche durch die zweiten Differenzialien der Coordinaten der tangirenden Fläche zweiter Ordnung (II.) construierbar, wie die obigen Gleichungen zeigen. Wird daher zum gegebenen Punkte einer Fläche (x, y, z) die tangirende Fläche zweiter Ordnung construirt, so ist das ganze zweite Glied der Zunahme von z , die Verlängerung von z von dem Punkte ($x+dx, y+dy, z+dz$) bis zu ihrem Durchschnitte mit jener Fläche; das zweite Differenzial ist daher die doppelte Differenz zwischen den Verlängerungen zur tangirenden Ebene und zur tangirenden Fläche zweiter Ordnung. — Dass aber eine solche tangirende Fläche zweiter Ordnung jederzeit construirt werden könne, geht daraus hervor, dass die sechs Constanten, die sie enthält, durch die sechs Gleichungen bestimmt werden können:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z'}{dx'^2} = 2\delta, \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{d^2 z'}{dx' dy'} = \kappa, \quad \kappa = \frac{d^2 z}{dx dy}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z'}{dy'^2} = 2\lambda,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dy^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dx'} = \beta + 2\delta x + \alpha y,$$

$$\beta = \frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx dy} y - \frac{d^2z}{dx^2} x$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz'}{dy'} = \gamma + \alpha x + 2\lambda y,$$

$$\gamma = \frac{dz}{dy} - \frac{d^2z}{dx dy} x - \frac{d^2z}{dy^2} y$$

$$z = z' = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \alpha xy + \lambda y^2, \quad \alpha = z - \frac{dz}{dx} x - \frac{dz}{dy} y + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{dx^2} x^2 + 2 \frac{d^2z}{dx dy} xy + \frac{d^2z}{dy^2} y^2 \right).$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (II.) substituirt, so erhält man die Gleichung der tangirenden Fläche zweiter Ordnung:

$$z' = \left(z - \frac{dz}{dx} x - \frac{dz}{dy} y + \left[\frac{d^2z}{dx^2} x^2 + 2 \frac{d^2z}{dx dy} xy + \frac{d^2z}{dy^2} y^2 \right] \right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx dy} y - \frac{d^2z}{dx^2} x \right) x' + \left(\frac{dz}{dy} - \frac{d^2z}{dx dy} x - \frac{d^2z}{dy^2} y \right) y' + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dx^2} x'^2 + \frac{d^2z}{dx dy} x' y' + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dy^2} y'^2.$$

Zusatz 1. Aus dem Vorhergehenden leuchtet ein, dass die tangirende Fläche zweiter Ordnung mit der gegebenen Fläche gleiche Lage der Coordinaten und gleiche Anfangspunkte habe. Auch ist beiden Flächen die tangirende Ebene (tangirende Fläche erster Ordnung) gemeinschaftlich.

Zusatz 2. Würde statt der Coordinate z eine andere Coordinate, x , als Function der beiden übrigen Coordinaten y und z , oder y als Function der beiden übrigen Coordinaten x und z genommen, so würde die tangirende Fläche zweiter Ordnung auf dieselbe Art gefunden, wie sie für $z = f(x, y)$ gefunden wurde. Denn die tangirende Fläche zweiter Ordnung ist, wie die tangirende Ebene, unabhängig von der Veränderlichkeit der einzelnen Coordinaten; sie bleibt dieselbe Fläche, welche Coordinate auch als Function der beiden übrigen genommen werden möge.

Zusatz 3. Das ganze zweite Differenzial einer Ordinate der Fläche ist also der Theil der verlängerten Ordinate, der zwischen der tangirenden Fläche erster und zweiter Ordnung liegt, multiplicirt mit zwei. Die geometrische Construction des ganzen zweiten Differenzials einer Ordinate hat also keine weitere Schwierigkeit. Will man die partiellen Differenzialien zweiter Ordnung construiren, so ist $\frac{1}{2} d^2z = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| dx^2 + \left| \frac{d^2z}{dx dy} \right| dx dy + \frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| dy^2$. Nun ist $\frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| dx^2$ die Verlängerung zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung in dem Parallelschnitt senkrecht auf der Axe Y . Eben so ist $\frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| dy^2$ die Verlängerung zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung in dem Parallelschnitt senkrecht auf die Axe X . Beide Differenzialien können also nach der Theorie ebener Curven ohne Schwierigkeit geometrisch construirt werden. Legt man nun durch den Endpunkt von $\frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| dx^2$, durch den Endpunkt von $\frac{1}{2} \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| dy^2$, und durch den Punkt (x, y, z) eine Ebene, so ist der Theil von $\frac{1}{2} d^2z$, der zwischen dieser

Ebene und der tangirenden Ebene erster Ordnung liegt, gleich $\left(\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|dx^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|dy^2\right)$.

Und der Theil von $\frac{1}{2}d^2z$, der zwischen jener Ebene und zwischen der tangirenden Fläche zweiter Ordnung liegt, ist $\left(\frac{1}{2}d^2z - \frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|dx^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|dy^2\right)$, also gleich $\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|dxdy$, so dass also auch diess partielle Differenzial ohne Schwierigkeit geometrisch construirt werden kann.

Auf dieselbe Art werden die dritten und höheren Differenzialien der Ordinate z analytisch und geometrisch bestimmt, wenn die tangirenden Flächen dritter und vierter Ordnung von den Gleichungen:

$$z'' = \alpha + \beta x + \gamma y + \lambda x^2 + \mu xy + \nu y^2 + \rho x^3 + \sigma x^2 y + \tau xy^2 + \omega y^3;$$

$$z'' = \alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y + \lambda'' x^2 + \dots + a_1 x^4 + \beta_1 x^3 y + \dots + \lambda_1 xy^3 + \mu_1 y^4;$$

u. s. w. bestimmt werden. — Wir werden von diesen allgemeinen Untersuchungen zur näheren Bestimmung der tangirenden Flächen *zweiter* Ordnung übergehen.

III.

Ueber die unterscheidenden Eigenschaften der tangirenden Flächen zweiter Ordnung.

Die Gleichung der tangirenden Fläche zweiter Ordnung ist, wenn die Ordinate z als Function von x und y genommen wird:

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \lambda xy + \lambda y^2.$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, verändert man die Axe von x in der Ebene xy um den Winkel φ , indem man neue Coordinaten nimmt, und

$$x = x' \cos. \varphi - y' \sin. \varphi, \quad y = x' \sin. \varphi + y' \cos. \varphi,$$

setzt.

Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned} z = & \alpha + (\beta \cos. \varphi + \gamma \sin. \varphi) x' + (\gamma \cos. \varphi - \beta \sin. \varphi) y' + (\delta \cos.^2 \varphi + \lambda \cos. \varphi \sin. \varphi + \lambda \sin.^2 \varphi) x'^2 + \\ & + (2\lambda \sin. \varphi \cos. \varphi - \lambda [\sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi] - 2\delta \cos. \varphi \sin. \varphi) x' y' + \\ & + (\delta \sin.^2 \varphi - \lambda \sin. \varphi \cos. \varphi + \lambda \cos.^2 \varphi) y'^2. \end{aligned}$$

Bestimmt man den Werth von φ in der Art, dass das Glied von $x'y'$ wegfällt, so wird

$$2 \frac{(\lambda - \delta)}{\lambda} = \frac{\sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi}{\sin. \varphi \cos. \varphi} = \frac{\cos. 2\varphi}{\frac{1}{2} \sin. 2\varphi}, \quad \text{und: } \frac{x}{\lambda - \delta} = \tan. 2\varphi.$$

ein Ausdruck, der immer einen reellen Werth von φ giebt, so dass es immer möglich ist, das Glied mit $x'y'$ verschwinden zu machen.

Bezeichnet man die Coefficienten von x' , y' , x'^2 , y'^2 mit B , C , D , K , so erhält man

$$z = \alpha + Bx' + Cx'y' + Dx'^2 + Ky'^2.$$

In dieser Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1) Die beiden Coefficienten D und K sind von Null verschieden.
- 2) Einer dieser Coefficienten ist gleich Null.
- 3) Die beiden Coefficienten sind gleich Null.

ad 1) Sind die beiden Coefficienten D und K von Null verschieden, so verändert man, um die Gleichung zu vereinfachen, den Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene $x'y'$, indem man $x'=x''+a$, $y'=y''+b$ setzt, und man erhält:

$$z=(a+Ba+Cb+Da^2+Kb^2)+(B+2Da)x''+(C+2Kb)y''+Dx''^2+Ky''^2.$$

Bestimmt man die willkürlichen Grössen a und b so, dass $a=-\frac{B}{2D}$, $b=-\frac{C}{2K}$ wird, so fallen die Glieder mit x'' und y'' aus, und man erhält, wenn die Summe der Constanten gleich S gesetzt wird:

$$z=S+Dx''^2+Ky''^2.$$

Setzt man $z=z'+S$, indem man den Anfangspunkt der Coordinate z verändert, so erhält man die einfache Gleichung:

$$z'=Dx''^2+Ky''^2,$$

welche zwei verschiedene Gleichungen giebt, je nachdem die Coefficienten D und K gleiche oder verschiedene Zeichen haben; so dass die Gleichungen stattfinden:

$$z'=Dx''^2+Ky''^2, \quad z'=Dx''^2-Ky''^2.$$

ad 2) Ist einer der Coefficienten D , K gleich Null, so sei $D=0$, und die frühere Gleichung geht in folgende über:

$$z=\alpha+Bx'+Cy'+Ky'^2.$$

Schafft man das Glied mit y' weg, indem man $y'=y''+b$ und $b=-\frac{C}{2K}$ setzt, so erhält man:

$$z=(\alpha+Cb+Kb^2)+Bx'+Ky''^2.$$

Und wird $z=z'+(\alpha+Cb+Kb^2)$ gesetzt, so folgt: $z'=Bx'+Ky''^2$.

ad 3) Sind die beiden Coefficienten B und K gleich Null, so geht die Gleichung in folgende über:

$$z=\alpha+Bx'+Cy',$$

welches die Gleichung einer Ebene ist.

Die tangirende Fläche zweiter Ordnung

$$z=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\kappa xy+\lambda y^2$$

kann daher vier verschiedene Gestalten annehmen, deren Gleichungen folgende sind:

$$z'=Dx''^2+Ky''^2 \quad (\text{I.})$$

$$z'=Dx''^2-Ky''^2 \quad (\text{II.})$$

$$z'=Bx'+Ky''^2 \quad (\text{III.})$$

$$z'=Bx'+Cy' \quad (\text{IV.})$$

1) Die Gleichung (I.), in der D und K einerlei Zeichen haben, giebt eine Fläche, deren Gestalt aus einigen Parallelschnitten leicht erkannt wird.

Wird sie durch eine auf der Ordinate z senkrechte Ebene durchschnitten, so ist die Durchschnittscurve eine *Ellipse*, weil z' constant wird. Diese Fläche wird daher in allen auf die Ordinate z senkrechten Durchschnitten in Ellipsen (in Kreisen, wenn $D=K$) durchschnitten.

Durchschnitte hingegen, die auf x'' oder y'' senkrecht sind, geben Apollonische Parabeln zu Durchschnitts-Curven. Beide Parabeln sind congruent, wenn $D=K$. Die Fläche (I.) ist daher ein *elliptisches Paraboloid*, und geht für $D=K$ in ein Rotations-Paraboloid über, wodurch die Gestalt der Fläche (I.) hinlänglich charakterisirt ist.

2) Die Gleichung (II.), in welcher die Coefficienten D und K verschiedene Zeichen haben, giebt eine Fläche von folgender Gestalt: Wird sie durch eine auf die Ordinate z senkrechte Ebene durchschnitten, so ist die Durchschnitts-Curve eine Hyperbel, und alle auf z senkrechten Durchschnitte geben Hyperbeln, weil $z'=M$ constant wird, und $K=Dx'^2-Ky''^2$ die Gleichung einer Hyperbel ist. Hingegen geben alle auf x'' oder y'' senkrechten Durchschnitte Apollonische Parabeln.

Die Fläche (II.) ist daher ein *Hyperbolisches Paraboloid*.

3) Die Fläche (III.) hat folgende Gestalt: Ist z' constant, werden also die Durchschnitte auf die Ordinate z senkrecht geführt, so giebt die Gleichung $z'=Bx'+Ky''^2$ eine Apollonische Parabel. Ist x' constant, sind die Durchschnitte auf x' senkrecht, so giebt jene Gleichung wieder eine Apollonische Parabel; ist endlich y'' constant, also $Ky''^2=A$, oder werden die Durchschnitte auf y'' senkrecht geführt, so giebt jene Gleichung eine gerade Linie; und alle auf y'' senkrechten Durchschnitte geben gerade Linien, die unter sich parallel sind, da die Coefficienten von z' und x' in der Gleichung $z'=Bx'+A$ constant, und von dem jedesmaligen Werthe y'' unabhängig sind. Diess ist die Eigenschaft der cylindrischen Flächen. Die Fläche (III.) ist daher ein *parabolischer Cylinder*. Der besondere Fall, dass in der Gleichung (III.) der Coefficient $B=0$ wird, wodurch $z'=Ky''^2$ wird, ändert nichts in der Gestalt dieser Fläche; die cylindrische Seitenfläche wird nur mit der Axe x' parallel.

4) Die Gleichung (IV.) $z'=Bx'+Cy'$ ist endlich die Gleichung einer Ebene. — Die tangirende Fläche zweiter Ordnung geht nur für Ebenen wieder in eine Ebene über, weil nur für die Ebene die Glieder δx^2 , zxy und λy^2 der Gleichung:

$$z=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+zxy+\lambda y^2$$

verschwinden können. Für alle übrigen Flächen können diese Glieder nicht sämmtlich gleich Null sein. Es kann daher für die Flächen überhaupt die tangirende Fläche zweiter Ordnung nur *singular*, d. h. für besondere Punkte dieser Flächen, niemals aber allgemein, ausser nur für eine Ebene, selbst wieder in eine Ebene zurückkehren.

Wir schliessen mit dem Resultate, dass die tangirende Fläche zweiter Ordnung nur in den vier Gestalten einer *Ebene*, eines *parabolischen Cylinders*, eines *hyperbolischen Paraboloids* und eines *elliptischen Paraboloids*, und in keinen ferneren

Gestalten erscheinen könne. Es theilen sich daher sämmtliche Flächen in Bezug auf ihre tangirenden Flächen zweiter Ordnung in die vier Abtheilungen:

1) Ebene, 2) Flächen, deren tangirende Fläche zweiter Ordnung parabolische Cylinder, 3) Flächen, deren tangirende Flächen zweiter Ordnung hyperbolische Paraboloid, 4) Flächen, deren tangirende Flächen zweiter Ordnung elliptische Paraboloid sind. Dadurch stellt sich uns die Aufgabe dar, die Eigenschaften und die algebraischen Kennzeichen dieser vier grossen Abtheilungen der Flächen zu bestimmen.

Wir schlagen folgenden Weg ein: Wenn eine Fläche zu den geradlinigen krummen Flächen gehört, d. h. wenn durch jeden ihrer Punkte eine gerade Linie gezogen werden kann, die ganz in ihr liegt, so muss auch die tangirende Ebene dieses Punktes die gerade Linie mit der Fläche gemeinschaftlich haben. Denn da alle Tangenten der Durchschnittscurven in der tangirenden Ebene liegen, und die Durchschnittscurve einer geradlinigen krummen Fläche in einer bestimmten Richtung die gerade Linie selbst ist, die ihre eigene Tangente ist, so muss diese gerade Linie selbst in der tangirenden Ebene liegen.

Wird nun z als Function von x und y genommen, und werden dx und dy als willkürliche und unabhängig Veränderliche so bestimmt, dass die polare Ebene, die durch die Coordinate z , also senkrecht auf die Ebene XY und durch den Punkt $(x+dx, y+dy, z)$ gelegt wird, die gegebene Fläche in der geraden Linie, die in ihr durch den Punkt (x, y, z) gezogen werden kann, durchschneidet (was immer möglich ist, da durch die verschiedenen Werthe von dx und dy alle möglichen Winkel um die Coordinate z herum bestimmt werden), so ist die ganze Zunahme von z oder Δz , gleich dem ersten Differenzial dz , da Δz die Verlängerung zur Fläche, dz die Verlängerung zur tangirenden Ebene ist, die aber in der geraden Linie, welche die Fläche und ihre tangirende Ebene gemeinschaftlich haben, zusammenfallen, so dass Δz und dz dieselben geraden Linien darstellen.

Ist aber $\Delta z = dz$, dann ist nothwendig die Summe aller höheren Differenzialien von z gleich Null, da

$$\Delta z = dx + \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \dots; \Delta z - dz = 0; \text{ also } \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \dots = 0.$$

Da in dieser Reihe für beliebig kleine Werthe von dx und dy jedes vorhergehende Glied grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, so folgt, dass einzeln $d^2z = 0$, $d^3z = 0$, und dass überhaupt alle höheren Differenzialien einzeln gleich Null seien. Werden diese Differenzialien in partielle Differenzialien zerlegt, so gehen die Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \left| \frac{dz}{dx} \right| dx + \left| \frac{dz}{dy} \right| dy; \\ \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| dx^2 + 2 \left| \frac{d^2z}{dxdy} \right| dx dy + \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| dy^2 &= 0; \\ \left| \frac{d^3z}{dx^3} \right| dx^3 + 3 \left| \frac{d^3z}{dx^2dy} \right| dx^2 dy + 3 \left| \frac{d^3z}{dxdy^2} \right| dx dy^2 + \left| \frac{d^3z}{dy^3} \right| dy^3 &= 0 \end{aligned}$$

Ordnet man die zweite und dritte dieser Gleichungen nach dem Differenzial-Quotienten $\frac{dy}{dx} = \omega$, so erhält man:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| + 2 \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| \omega + \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| \omega^2 = 0;$$

$$\left| \frac{d^3 z}{dx^3} \right| + 3 \left| \frac{d^3 z}{dx^2 dy} \right| \omega + 3 \left| \frac{d^3 z}{dx dy^2} \right| \omega^2 + \left| \frac{d^3 z}{dy^3} \right| \omega^3 = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Grösse $\omega = \frac{dy}{dx}$, so erhält man die schlechthin allgemeinen Kriterien zur Unterscheidung der geradlinigen krummen Flächen von allen übrigen Flächen. Man erhält nämlich eine Bedingungsgleichung, die für alle geradlinigen krummen Flächen erfüllt wird, und die für alle übrigen Flächen nicht stattfinden kann.

Allein die Elimination einer unbekannten Grösse aus zwei Gleichungen des zweiten und dritten Grades giebt immer eine viel zu verwickelte Endgleichung, als dass sie mit Vortheil angewendet werden könnte. Es sind daher einfachere Kriterien zu suchen.

Wenn die gegebene Fläche eine geradlinige krumme Fläche ist, so muss schon das zweite Differenzial der Ordinate z für einen bestimmten Werth von $\frac{dy}{dx}$ allgemein gleich Null sein. Löst man nun die Gleichung

$$\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| + 2 \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| \frac{dy}{dx} + \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| \frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} = \pm \sqrt{\frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht für den Fall, dass $\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| = 0$ wird, die andere Gleichung

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|} = \pm \sqrt{\frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|^2}}.$$

Diese Gleichungen geben folgende vier verschiedene Fälle:

- 1) Es sind $\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|$, $\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|$, $\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|$ einzeln gleich Null; dann ist $\frac{dy}{dx} = 0$, eben so $\frac{dx}{dy} = 0$; die Richtung, in welcher die Fläche durch Ebenen durchschnitten werden muss, dass sie eine gerade Linie als Durchschnittcurve gebe, ist unbestimmt; sie giebt in unzählig vielen Richtungen gerade Linien als Durchschnittscurven, d. h. sie ist selbst eine Ebene.

2) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist negativ, oder $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist grösser als $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|^2$, und dann haben $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dx}{dy}$ keinen reellen Werth, d. h. die Fläche kann in keiner Richtung durch eine Ebene so geschnitten werden, dass sie gerade Linien als Durchschnittscurven gäbe; die Fläche gehört also nicht zu den geradlinigen krummen Flächen.

3) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist gleich Null; dann haben $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dx}{dy}$ nur einen einzigen Werth; die Flächen können in jedem Punkte *nur nach einer Richtung* durch Ebenen in geraden Linien geschnitten werden. Diess sind die *developpablen* Flächen, wie sogleich deutlich werden wird.

4) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist positiv, oder $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist kleiner, als $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|^2$; die Grösse $\frac{dy}{dx}$ (oder $\frac{dx}{dy}$) hat zwei verschiedene Werthe. Da aber eine krumme Fläche allgemein in jedem Punkte nur nach einer Richtung in geraden Linien durchgeschnitten werden kann, so wird einer der Werthe $\frac{dy}{dx}$ diese Richtung selbst, der andere singular eine gerade Linie, und allgemein die Richtung angeben, in welcher die Durchschnittscurve der Fläche eine Curve ist, die in ihrem Durchschnitt mit der geraden Linie einen *Inflexionspunkt* hat; denn auch in diesem Falle wird singular $dz^2=0$. Diese Flächen werden wir als die *windschiefen* (gewunden-schiefen) Flächen kennen lernen.

Diese vier Abtheilungen der Flächen entsprechen ganz genau den vier Abtheilungen, die wir früher aus den Eigenschaften der tangirenden Flächen zweiter Ordnung gefunden haben. Die Ebenen sind in beiden Fällen dieselben, und für die übrigen Abtheilungen gilt der *Lehrsatz*: dass die Flächen, die nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehören, *elliptische Paraboloid*e zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung haben, dass die *developpablen* Flächen *parabolische Cylinder*, und dass endlich die *windschiefen* Flächen *hyperbolische Paraboloid*e zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung haben. Dabei ist zu bemerken, dass die elliptischen Paraboloid selbst Flächen sind, die nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehören, dass die parabolischen Cylinder selbst developpable Flächen, und dass die hyperbolischen Paraboloid selbst windschiefe Flächen sind, so dass zwischen den beiderseitigen vier Abtheilungen der Flächen die vollkommenste Uebereinstimmung herrscht.

Wir werden diese Sätze der Reihe nach ausführen.

1) Die elliptischen Paraboloid sind tangirende Flächen zweiter Ordnung für diejenigen Flächen, für welche in der Gleichung (I.) $z'=Dx'^2+Ky'^2$ die Coefficienten *D* und *K* einerlei Zeichen haben. Nun ist

$$\begin{aligned} D &= \delta \cos.^2 \varphi + x \cos. \varphi \sin. \varphi + \lambda \sin.^2 \varphi, \\ K &= \delta \sin.^2 \varphi - x \sin. \varphi \cos. \varphi + \lambda \cos.^2 \varphi. \end{aligned}$$

Nach einem bekannten Satze der Analysis ist *D* immer $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$, wenn δ und λ

gleiche Zeichen haben, und wenn $\delta\lambda > \frac{1}{4}x^2$ ist. Tritt letztere Bedingung ein, so haben ohnehin δ und λ gleiche Zeichen, weil sonst das Product $\delta\lambda$ nicht grösser sein könnte, als die nothwendig positive Grösse x^2 . Ebenso ist K immer $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$, wenn δ und λ gleiche Zeichen haben, und $\delta\lambda > \frac{1}{4}x^2$ ist.

Für alle Flächen sind daher die Zeichen von D und K gleich, oder alle Flächen haben elliptische Paraboloiden zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung, in welchen $\delta\lambda > \frac{1}{4}x^2$ ist. Nun ist $\delta = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2x}{dx^2} \right|$, $\lambda = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|$, $x = \left| \frac{d^2x}{dxdy} \right|$, also $\delta\lambda = \frac{1}{4} \left| \frac{d^2x}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|$, $\frac{1}{4}x^2 = \left| \frac{d^2x}{dxdy} \right|^2$; und ist $\delta\lambda > \frac{1}{4}x^2$, so ist $\left| \frac{d^2x}{dxdy} \right|^2 - \left| \frac{d^2x}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|$ eine negative Grösse. Dadurch ist aber gerade die Bedingung erfüllt, die für diejenigen Flächen gefunden wurde, die nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehören. Zugleich erhellt auch, dass das elliptische Paraboloid nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehöre.

2) Die parabolischen Cylinder sind tangirende Flächen zweiter Ordnung für alle Flächen, für welche die Gleichung stattfindet:

$$z' = Bx' + Ky'^2$$

oder auch

$$z' = Cy' + Dx'^2.$$

Denn beide Gleichungen sind dieselben, wenn man x und y mit einander vertauscht.

Findet aber die Gleichung $z' = Bx' + Ky'^2$ statt, so ist $D=0$, oder

$$\delta \cos.^2 \varphi + x \cos. \varphi \sin. \varphi + \lambda \sin.^2 \varphi = 0$$

$$\delta + x \operatorname{tang.} \varphi + \lambda \operatorname{tang.}^2 \varphi = 0.$$

Wird diese Gleichung nach $\operatorname{tang.} \varphi$ aufgelöst, so ist

$$\operatorname{tang.} \varphi + \frac{1}{2} \frac{x}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{\delta}{\lambda}}.$$

Nun ist $\operatorname{tang.} 2\varphi = \frac{x}{\lambda - \delta}$, und da x , λ , δ bestimmte Coefficienten sind, so hat $\operatorname{tang.} 2\varphi$ nur einen Werth. Es kann daher auch $\operatorname{tang.} \varphi$ nur einen Werth haben, und es muss der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen verschwinden. Es ist daher für die Flächen, die parabolische Cylinder zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung haben:

$$\frac{1}{4}x^2 - \delta\lambda = 0, \text{ oder } \left| \frac{d^2x}{dxdy} \right|^2 - \left| \frac{d^2x}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right| = 0.$$

Diess ist aber genau die Bedingungsgleichung für developpable Flächen, so dass auch diese Abtheilungen mit einander übereinstimmen, und die parabolischen Cylinder als developpable Flächen erscheinen.

3) Die hyperbolischen Paraboloiden sind tangirende Flächen zweiter Ordnung für alle Flächen von der Gleichung (II.), $z' = Dx'^2 - Ky'^2$, in denen die Coefficienten D und K verschiedene Zeichen haben. Haben aber die Coefficienten D und K ver-

schiedene Zeichen, so ist nothwendig in den sie bestimmenden Gleichungen: $\frac{1}{4}z^2 > \delta\lambda$,

oder $\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 > \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \cdot \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$, also $\pm \sqrt{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \cdot \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}$ eine reelle positive und negative Grösse. Diess ist aber genau die Bedingung, die wir für die windschiefen Flächen gefunden haben, so dass auch hierin beide Abtheilungen übereinstimmen, und die hyperbolischen Paraboloiden als windschiefe Flächen erscheinen.

Wir haben daher durch die tangirenden Flächen zweiter Ordnung eine apriorische und rationale Eintheilung der Flächen: in Ebenen, in developpable Flächen, in windschiefe Flächen und in doppelt krumme Flächen, wie wir diejenigen Flächen nennen wollen, die nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehören.

Es ist eine merkwürdige Thatsache, dass die vier ebenen Curven zweiter Ordnung, die gerade Linie, die Parabel, die Hyperbel und die Ellipse, vier Abtheilungen der krummen Flächen bestimmen, die nicht bloss für Flächen der zweiten Ordnung, sondern für Flächen jeder Ordnung, sie mögen algebraisch oder transcendent sein, gültig bleiben. — Da die tangirenden Flächen dritter, vierter und höherer Ordnung fernere natürliche Unterabtheilungen aller Flächen geben, so wird durch diese tangirenden Flächen ein naturgemässes und für alle Fälle ausreichendes Eintheilungsprincip aller übrigen Flächen aufgestellt. Diese ferneren Unterabtheilungen der Flächen liegen ausser den Grenzen der gegenwärtigen Untersuchung.

IV.

Ueber die cylindrischen Flächen.

Wir gehen nun zur Untersuchung einzelner Flächen über. Für die developpablen Flächen haben wir die Gleichungen gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}; \quad \left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|.$$

Es sind hier die zwei Fälle möglich, dass die Grösse $\frac{dy}{dx}$ entweder eine *constante* oder eine *veränderliche* Grösse sein kann. Ist $\frac{dy}{dx}$ constant, so ist die Fläche eine cylindrische Fläche.

Beweis. Aus $\frac{dy}{dx} = C$ folgt, dass eine Gleichung der geraden Linie, in der die gesuchte Fläche geschnitten werden kann, sei: $\frac{\eta - y}{\xi - x} = C$ (I.), worin η und ξ zwei Coordinaten der geraden Linien ausdrücken. Bestimmt man nun auf dieselbe Art $\frac{dz}{dx}$ aus der entsprechenden Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|} = C'$$

und bezeichnet man die dritte Coordinate der geraden Linie mit ζ , so folgt die Gleichung: $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = C'$ (II).

Die Gleichungen (I.) und (II.) bestimmen alle geraden Linien, in welchen die gegebene Fläche geschnitten werden kann. Da nun C und C' constante, von den verschiedenen Werthen x, y, z unabhängige Grössen sind, so folgt, dass *alle* geraden Linien, in welchen die gegebene Fläche geschnitten werden kann, unter sich parallel seien. Diess ist aber die Eigenschaft der cylindrischen Flächen; denn eine cylindrische Fläche entsteht, wenn sich eine (unbegrenzte) gerade Linie längs einer gegebenen Leitungscurve immer parallel mit sich selbst fortbewegt.

Es sind nun im Allgemeinen folgende Punkte zu erörtern:

1) Nach welchen Kriterien wird entschieden, ob eine Fläche cylindrisch sei, oder nicht?

2) Wie wird die Lage der geraden (charakteristischen) Linie bestimmt, durch deren Bewegung längs einer beliebigen Leitungscurve die cylindrische Fläche beschrieben wird?

3) Wie werden die Leitungscurven selbst bestimmt?

4) Wie werden die Gleichungen der cylindrischen Flächen gefunden, wenn die Lagen und Gleichungen der geraden Linien und der Leitungscurven gegeben sind?

ad 1) Was die erste Frage anbelangt, so ist bei cylindrischen Flächen die Gleichung gegeben:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|} + \frac{\sqrt{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}.$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist gleich Null, und $\frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}$ gleich einer constanten Grösse c .

Auf dieselbe Art findet man auch $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$ als constante Grössen.

ad 2) Was die Bestimmung der charakteristischen (Erzeugungs-)Linie anbelangt, so seien ξ, η, ζ ihre rechtwinkligen, mit x, y, z parallelen Coordinaten. Da $\frac{dy}{dx} = c$, und $\frac{dz}{dx} = k$ ist, und da die Erzeugungslinie die Grössen $(dy$ und $dx)$, und $(dz$ und $dx)$ als Coordinaten hat, so ist $\eta = c\xi + A$, $\zeta = k\xi + B$. Da ferner diese Erzeugungslinie durch den Punkt (x, y, z) der Fläche geht, so gelten auch die Gleichungen:

chungen: $y=cx+A$; $z=kx+B$. Diese beiden Gleichungen mit den früheren verbunden geben die Gleichungen: $(y-\eta)=c(x-\xi)$; $(z-\zeta)=k(x-\xi)$.

Sie bestimmen zwei Ebenen, die durch den Punkt (x,y,z) der cylindrischen Fläche gehen, und deren Durchschnittslinie die erzeugende, characteristische Linie dieser Fläche ist.

ad 3) Die Leitungscurven der cylindrischen Flächen, diejenigen Curven, an denen sich die characteristische gerade Linie fortwährend mit sich selbst parallel fortbewegt, und dadurch die cylindrische Fläche erzeugt, können auf's Leichteste bestimmt werden. Denn jeder Durchschnitt der gegebenen cylindrischen Fläche mit andern Flächen oder mit Ebenen giebt doppelt krumme oder ebene Curven, welche Leitungscurven der cylindrischen Fläche sind. Man braucht daher nur die Gleichung dieser Fläche mit der Gleichung irgend einer andern sie durchschneidenden Fläche zu verbinden, um die beiden Gleichungen einer Leitungscurve zu erhalten. Gewöhnlich wählt man dazu ebene Flächen, und zwar Parallelschnitte oder Polarschnitte der gegebenen cylindrischen Fläche.

ad 4) Man findet endlich aus den Gleichungen der Leitungscurve und der erzeugenden geraden Linie die Gleichung der cylindrischen Fläche auf folgende Art:

Es seien die Gleichungen der erzeugenden geraden Linie: $\xi=a\zeta+m$; $\eta=b\zeta+n$, die Gleichungen der Leitungscurven: $F(x',y',z)=0$, $f(x',y',z)=0$, und die Coordinaten der cylindrischen Fläche: x,y,z . Da der Punkt ξ,η,ζ ein Punkt in der cylindrischen Fläche ist, der also zugleich ein Punkt der Erzeugungslinie ist, so sind die Gleichungen der Erzeugungslinie, die ganz in der cylindrischen Fläche liegt:

$$x-\xi=a(z-\zeta); \quad y-\eta=b(z-\zeta).$$

Ferner gelten für diesen Punkt die Gleichungen der Leitungscurve:

$$F(\xi,\eta,\zeta)=0, \quad f(\xi,\eta,\zeta)=0.$$

Werden aus diesen vier Gleichungen die drei Constanten ξ, η, ζ eliminirt, so bleibt eine Gleichung zwischen (x,y,z,a,b) übrig, welche die gesuchte Gleichung der cylindrischen Fläche ist. Denn sie bestimmt alle möglichen Punkte von x, y, z , d. h. alle Punkte der cylindrischen Fläche.

Beispiele über die cylindrischen Flächen.

Vorertünerung. Bei den Untersuchungen über die Flächen überhaupt kommen Gleichungen mit partiellen Differenzialien der Coordinaten vor. Ist die Gleichung einer Fläche verwickelt gegeben, $u=f(x,y,z)=0$, so findet man die partiellen Differenzialien der Coordinaten aus den partiellen Differenzialien der Fläche. Wird z. B. z als Function von x und y genommen, so gelten folgende Gleichungen:

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = - \frac{\left| \frac{du}{dx} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|}; \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = - \frac{\left| \frac{du}{dy} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|};$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| &= - \frac{\left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| + 2 \left| \frac{d^2 u}{dx dy} \right| \left| \frac{dz}{dx} \right| + \left| \frac{d^2 u}{dz^2} \right| \left| \frac{dz}{dx} \right|^2}{\left| \frac{du}{dz} \right|} \\ \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| &= - \frac{\left| \frac{d^2 u}{dy^2} \right| + 2 \left| \frac{d^2 u}{dy dz} \right| \left| \frac{dz}{dy} \right| + \left| \frac{d^2 u}{dz^2} \right| \left| \frac{dz}{dy} \right|^2}{\left| \frac{du}{dz} \right|} \\ \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| &= - \frac{\left| \frac{d^2 u}{dx dy} \right| + \left| \frac{d^2 u}{dx dz} \right| \left| \frac{dz}{dy} \right| + \left| \frac{d^2 u}{dy dz} \right| \left| \frac{dz}{dx} \right| + \left| \frac{d^2 u}{dz^2} \right| \left| \frac{dz}{dx} \right| \left| \frac{dz}{dy} \right|}{\left| \frac{du}{dz} \right|} \end{aligned}$$

Da in den Bedingungsgleichungen der Flächen keine höheren Differenzialien enthalten sind, so reichen diese Formeln vollkommen aus.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung einer Fläche gegeben:

$$u = x^3 + p^2 y - p^2 x = 0.$$

Es ist: $\frac{du}{dx} = -p^2$; $\frac{du}{dy} = +p^2$; $\frac{du}{dz} = 3x^2$; $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$; $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$; $\frac{d^2 u}{dx dy} = 0$; $\frac{d^2 u}{dx dz} = 0$;
 $\frac{d^2 u}{dy dz} = 0$; $\frac{d^2 u}{dz^2} = 6x$.

Folglich sind die partiellen Differenzialien: $\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{p^2}{3x^2}$, $\left| \frac{dz}{dy} \right| = -\frac{p^2}{3x^2}$, $\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| = -\frac{2p^4}{9x^5}$,
 $\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| = -\frac{2p^4}{9x^5}$, $\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| = \frac{2p^4}{9x^5}$.

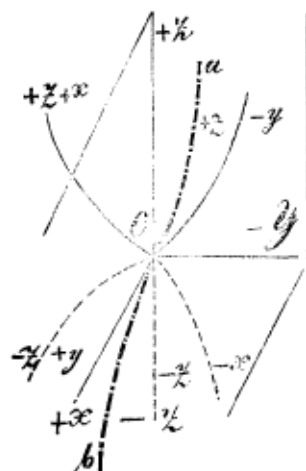
Da nun $\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 = \frac{d_1^2 z}{dx^2} \frac{d_2^2 z}{dy^2}$ ist, so folgt, dass die gegebene Fläche developpabel sei.

— Und da überdiess $\frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} = \frac{\left| \frac{d_1^2 z}{dx^2} \right|}{\left| \frac{d_2^2 z}{dx dy} \right|} = -1$ ist, so folgt, dass $\frac{dy}{dx} = +1$ gleich einer constanten Grösse, und dass die Fläche selbst eine cylindrische Fläche sei.

Um die Gleichungen der erzeugenden geraden Linie zu finden, so ist eine dieser Gleichungen aus $\frac{dy}{dx} = 1$ folgende: $x - \xi = y - \eta$, wenn η und ξ zwei Coordinaten dieser geraden Linie ausdrücken. Um eine zweite Gleichung zu finden, bestimmt man $\frac{dz}{dx}$ auf dieselbe Art, wie $\frac{dy}{dx}$ bestimmt worden ist, und man findet: $\frac{dz}{dx} = 0$.

Daraus folgt, dass die zweite Gleichung der geraden Linie sei: $x - \xi = 0$. Die erzeugende gerade Linie steht also senkrecht auf der Axe Z , ist parallel zu der Ebene XY , und durchschneidet (vermöge der Gleichung $[x - \xi] = [y - \eta]$) alle Coordinaten x und y unter halben rechten Winkeln; wodurch die Lage der erzeugenden geraden Linie vollkommen bestimmt ist.

Um eine Leitungscurve zu bestimmen, wählt man z. B. diejenige Ebene, welche auf der erzeugenden Linie senkrecht steht, also mit z parallel ist, oder durch z selbst gezogen wird. Die Gleichung dieser Ebene ist: $(x-\xi) = -(y-\eta)$. Diese Gleichung mit der gegebenen Gleichung der Fläche verbunden, bestimmt die gesuchte Leitungscurve. Wird die Ebene $(x-\xi) = -(y-\eta)$ durch den Anfangspunkt der Co-



ordinaten gelegt, so wird: $\xi = -\eta$. Diese Gleichung mit $z^3 + p^2y - p^2x = 0$ verbunden, bestimmt die auf der Erzeugungslinie senkrechte Durchschnittscurve, aOb , im Anfangspunkte der Coordinaten. Ihre Eigenschaften sind sehr leicht zu ermitteln. Ihre Projectionen auf den Ebenen XZ und YZ sind die congruenten cubischen Parabeln $(+z+x, 0, -z-x)$ und $(+z-y, 0, -z+y)$, von den Gleichungen: $z^3 + 2p^2y = 0$; $z^3 - 2p^2x = 0$. Beide Parabeln haben im Anfangspunkte der Coordinaten einen Inflexionspunkt, und sind beiderseits unbegrenzt. Die beiden durch sie gelegten senkrechten cylindrischen Flächen geben als Durchschnittscurve aOb ; und diejenige gerade Linie, die sich längs dieser Curve immer parallel mit der Ebene XY und in solcher Lage, dass sie mit allen Coordinaten x

und y halbe rechte Winkel macht, fortbewegt, erzeugt die cylindrische Fläche von der Gleichung $u = z^3 + p^2y - p^2x = 0$.

Beispiel 2. Es sei eine Erzeugungslinie: $\xi = a\zeta + A$, $\eta = b\zeta + B$, und eine Leitungscurve: $x'^2 + y'^2 = r^2$, $z' = m \arctg. \left(\frac{y'}{x'} \right)$ gegeben. Man sucht die Gleichung der cylindrischen Fläche, welche entsteht, wenn sich die Erzeugungslinie längs der Leitungscurve immer parallel mit sich selbst fortbewegt. — Da die Leitungslinie die gewöhnliche Schraubenlinie ist, so wird die gesuchte cylindrische Fläche eine unendlich oftmal sich selbst durchbrechende gewundene Rolle mit parallelen Tangenten sein. Steht aber die Erzeugungslinie senkrecht auf der Ebene XY , so geht diese Fläche in den gewöhnlichen senkrechten Cylindermantel mit kreisförmiger Basis über.

Auflösung. Für den Punkt ξ, η, ζ der gesuchten Fläche gelten die Gleichungen:

$$(1.) (x-\xi) = a(z-\zeta); (2.) y-\eta = b(z-\zeta); (3.) \zeta = m \cdot \arctg. \frac{\eta}{\xi}; (4.) \xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Grösse $(z-\zeta)$, so erhält man: $b(x-\xi) = a(y-\eta)$. Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus Gleichung (4.) die Grösse η , so erhält man:

$$\xi = -\frac{(ay-bx) \pm a\sqrt{r^2(a^2+b^2) - (ay-bx)^2}}{a^2+b^2}$$

$$\xi = -N \pm M, \text{ wo } N = -\frac{b}{a^2+b^2}(ay-bx), \quad -M = \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{r^2(a^2+b^2) - (ay-bx)^2} \text{ ist.}$$

$$\text{Da } \eta = \pm\sqrt{r^2 - \xi^2}, \text{ so ist } \eta = \pm\sqrt{r^2 - (-N \pm M)^2}.$$

Es ist daher $\frac{\eta}{\xi} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - (\pm M - N)^2}}{\pm M - N}$, worin die Grössen M und N ausser den Constanten nur die Ordinaten x, y der cylindrischen Fläche enthalten.

Ferner ist: $\xi = a\zeta + (x - az)$, $\eta = b\zeta + (y - bz)$, und da $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ ist, so folgt, dass:

$$r^2 = (a^2 + b^2)\zeta^2 + 2(a[x - az] + [by - bz]\zeta) + [x - az]^2 + [y - bz]^2.$$

Setzt man

$$\frac{a(x - az) + b(y - bz)}{a^2 + b^2} = K,$$

$$\frac{r^2 - ([x - az]^2 + [y - bz]^2)}{a^2 + b^2} = L^2,$$

so erhält man: $\zeta = -K \pm \sqrt{L^2 + K^2}$, worin die Grössen K und L nur Constanten und die Coordinate der cylindrischen Fläche (x, y, z) enthalten.

Substituirt man die Werthe $\frac{\eta}{\xi}$ und ζ in die Gleichung $\zeta = m \operatorname{arc.tang.} \frac{\eta}{\xi}$, so erhält man die Gleichung der gesuchten cylindrischen Fläche:

$$-K \pm \sqrt{L^2 + K^2} = m \operatorname{arc.tang.} \frac{\sqrt{r^2 - (\pm M - N)^2}}{\pm M - N},$$

worin nur die Constanten a, b, r und die Coordinaten x, y, z enthalten sind.

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn entweder $a=b$ ist, d. h. wenn die mit den geraden Linien der cylindrischen Fläche parallele Linie mit den Axen X und Y gleiche Winkel macht, oder wenn eine der Constanten, a, b , gleich Null wird. Ist z. B. $b=0$, so sind die geraden Linien der cylindrischen Fläche auf der Axe Y senkrecht, also zur Ebene XZ parallel, und in dieser Ebene unter einem von a abhängigen Winkel gegen die Axe X geneigt.

Entwickeln wir die Gleichung unter der letzten Bedingung, so wird $N=0$, $M = \sqrt{r^2 - y^2}$, $K = \frac{x - az}{a}$, $L = \frac{r^2 - (x - az)^2 - y^2}{a^2}$, $\sqrt{K^2 + L^2} = \frac{1}{a} \sqrt{r^2 - y^2}$, und die obige Gleichung geht in folgende über:

$$\frac{az - x}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{r^2 - y^2} = m \operatorname{arc.tang.} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

worin die Wurzeln positiv und negativ genommen werden können.

Für Werthe von y , die grösser sind, als r , wird die Gleichung imaginär; diesen entsprechend, ist aus der geometrischen Construction klar, dass die cylindrische Fläche unendliche Male von 2 Ebenen tangirt wird, die auf dem Durchmesser des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, in welchen $+y$ und $-y$ die grössten Werthe haben, senkrecht errichtet werden. Ueber diese tangirenden Ebenen hinaus kann sich also diese Fläche nicht erstrecken.

Für $a=0$ und $b=0$, wenn die geraden Linien der cylindrischen Fläche senkrecht auf der Ebene XY stehen, geht die Gleichung in folgende über:

$$az - x + \sqrt{r^2 - y^2} = amr \operatorname{arc.tang.} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

oder, da $a=0$ ist:

$$x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Die Fläche geht dann in die Fläche des gewöhnlichen senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Basis über.

Durchschneidet man die Fläche

$$az - x + \sqrt{(r^2 - y^2)} = amr \operatorname{arc.tang.} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

durch Ebenen, die mit den Coordinaten-Ebenen parallel sind, so erhält man folgende Curven:

Wenn die Durchschnits-Ebene mit XZ parallel ist, also $y=c$ genommen wird:

$$az - x \pm \sqrt{r^2 - c^2} = amr \operatorname{arc.tang.} \pm \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}.$$

Diese Gleichung stellt unendlich viele unter sich parallele Linien dar, da der Ausdruck $\operatorname{arc.tang.} \pm \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}$ unendlich viele Werthe hat. Diess gilt auch dann noch, wenn $c=r$ ist. Sämmtliche Gerade sind mit der Linie $az - x = 0$ parallel.

2) Ist die Durchschnits-Ebene mit XY parallel, also $z=c$, so ist:

$$ac - x \pm \sqrt{r^2 - y^2} = amr \operatorname{arc.tang.} \pm \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \quad (\text{II.})$$

3) Ist die Durchschnits-Ebene mit YZ parallel, also $x=c$, so geht die Gleichung in folgende über:

$$az - c \pm \sqrt{r^2 - y^2} = amr \operatorname{arc.tang.} \pm \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \quad (\text{III.})$$

Die Gleichungen (II.) und (III.) sind also transcendente Curven derselben Art. Ihre besonderen und merkwürdigen Eigenschaften können nach den Lehren über ebene Curven ohne Schwierigkeit ermittelt werden.

Wenn wir umgekehrt die Kriterien der cylindrischen Flächen auf die Gleichung:

$$az - x \pm \sqrt{r^2 - y^2} = amr \operatorname{arc.tang.} \pm \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

anwenden, so ist auf den ersten Blick einleuchtend, dass diese Gleichung eine cylindrische Fläche darstellt; denn es ist $\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| = 0$, und $\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| = 0$. Daraus folgt, dass $\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} \right| = \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| = 0$

sei. Wird $\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| = C$ gesetzt, so ist $C = \frac{b}{a} = 0$, also $b=0$, und die eine Gleichung der geraden Linie ist: $y - r = 0$.

Aus $a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1$, und $b=0$ folgt, dass $adz = dx$, $a(z - \zeta) = (x - \xi)$ sei, welches die zweite Gleichung der geraden, charakteristischen Linie der cylindrischen Fläche ist.

Zusatz. Will man für eine gegebene cylindrische Fläche die tangirende (cylindrische) Fläche zweiter Ordnung construiren, so kann diess nach den vorhergehenden Untersuchungen ohne alle Schwierigkeit geschehen. Ist z. B. die Fläche: $z^3 = p^2 x - p^2 y$ gegeben, so ist, wenn x', y', z' die Coordinaten der tangirenden Fläche zweiter Ordnung bezeichnen, die Gleichung dieser Fläche:

$$z' = \left(z - \frac{p^2}{3z^2} [x - y] - \frac{1}{9} \frac{p^4}{z^3} [x - y]^2 \right) + \left(\frac{p^2}{3z^2} \left[1 + \frac{2p^2}{3z^3} [x - y] [x' - y'] \right] - \frac{1}{9} \frac{p^4}{z^3} [x' - y']^2 \right).$$

Für einen beliebigen Punkt der cylindrischen Fläche, z. B. $x = \frac{3}{2}p$, $y = \frac{1}{2}p$, $z = p$, geht diese Gleichung der tangirenden Fläche in folgende über:

$$z' = \frac{5}{9}p + \frac{5}{9}(x' - y') - \frac{1}{9p}(x' - y')^2.$$

Werden nun die unabhängigen Zunahmen von x und y beliebig gross gesetzt, so findet man die Grössen der zweiten Differenzialien $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx dy}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$. Wird $dx = dy = p$ gesetzt, so bezeichnet $\frac{dx}{dy} = 1$ diejenige Richtung der cylindrischen Fläche, in welcher ihre tangirende Fläche erster Ordnung mit ihr selbst zusammenfällt (wie oben gefunden wurde); es ist daher $d^2 z = 0$, $d^3 z = 0$. Und in der That sind für die Werthe $dx = p$, $dy = p$:

$$\frac{d^2 z}{x^2} = -\frac{2}{9}p, \quad \frac{d^2 z}{x, y} = +\frac{2}{9}p, \quad \frac{d^2 z}{y^2} = -\frac{2}{9}p,$$

also

$$d^3 z = d^2 z + 2d^2 z + 2d^2 z = 0.$$

Aber für alle anderen Werthe von $\frac{dx}{dy}$, z. B. $dx = p$, $dy = 2p$, folgt:

$$\frac{d^2 z}{x^2} = -\frac{2}{9}p, \quad \frac{d^2 z}{xy} = \frac{4}{9}p, \quad \frac{d^2 z}{y^2} = -\frac{8}{9}p,$$

also

$$d^3 z = -\frac{2}{9}p.$$

Es können daher die partiellen, wie die totalen Differenzialien ihrer Grösse und Lage nach berechnet werden, sowie sie auch mit Hilfe ihrer tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung ihrer Grösse und Lage nach construirt werden können.

Geometrische Ableitung der Gleichungen der cylindrischen Flächen.

Die Bedingungsgleichungen der cylindrischen Flächen können auch unmittelbar durch geometrische Betrachtungen gefunden werden.

Eine cylindrische Fläche entsteht nämlich, wenn durch alle Punkte einer Curve (Leitungcurve) gerade und unter sich parallele Linien gelegt, und durch eine einzige

Zusatz. Sind in der Bedingungsgleichung $q(y-ax)=f(z-\beta x)$ die Constanten α und β einzeln gleich Null, steht also die erzeugende gerade Linie senkrecht auf der Ebene **YZ**, so drückt die Gleichung $qy=fz$ die Coordinatengleichung einer Curve aus, die in der Ebene **YZ** liegt, und durch deren Punkte sich die charakteristische Linie fortbewegt, und so die cylindrische Fläche erzeugt.

Diese Ableitung der Bedingungsgleichung der cylindrischen Flächen ist rein geometrisch und aus den elementaren Eigenschaften dieser Flächen selbst entnommen. Alle geraden Linien sind unter sich parallel; die einzelnen Projectionen sind mit den Projectionen der Linie **OP** parallel. Die einzelnen Projectionen sind aber verschieden weit von den Linien **OP'** und **OP''** entfernt; ihre jedesmaligen Entfernungen müssen daher durch Operationen (Gleichungen) auf einander reducirt werden können, und diese Gleichungen müssen aus den Gleichungen der gegebenen Flächen ableitbar sein.

Zusatz. Aus der ersten Bedingungsgleichung: $q(y-ax)=f(z-bx)$ kann durch Differenzirung die zweite Bedingungsgleichung abgeleitet werden. Wird nämlich z. B. x als Function von y und z genommen, so ist:

$$\frac{d(q[y-ax])}{d(y-ax)} \left(dy - a \left[\frac{dx}{dy} dy + \frac{dx}{dz} dz \right] \right) = \frac{d(f[z-bx])}{d(z-bx)} \left(dz - b \left[\frac{dx}{dy} dy + \frac{dx}{dz} dz \right] \right),$$
 und da y und z von einander unabhängig sind, so zerlegt sich diese Gleichung in folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 - a \frac{dx}{dy} &= \frac{d(f[z-bx])}{d(q[y-ax])} \frac{d(y-ax)}{d(z-bx)} \left(-b \frac{dx}{dy} \right) \\ -a \frac{dx}{dz} &= \frac{d(f[z-bx])}{d(q[y-ax])} \frac{d(y-ax)}{d(z-bx)} \left(1 - b \frac{dz}{dx} \right). \end{aligned}$$

Wird der Factor rechts des Gleichheitszeichens eliminirt, so folgt:

$$\frac{1 - a \frac{dx}{dy}}{b \frac{dx}{dz}} = \frac{a \frac{dx}{dz}}{1 - b \frac{dz}{dx}},$$

oder:

$$1 - a \frac{dx}{dy} - b \frac{dx}{dz} = 0.$$

Werden statt y und z je zwei andere Coordinaten als die unabhängigen Veränderlichen genommen, so entstehen zwei ganz analoge Bedingungsgleichungen.

Endlich wird durch nochmalige Differenzirung die dritte Bedingungsgleichung:

$$a \left| \frac{d^2 x}{dy dz} \right| + b \left| \frac{d^2 x}{dz^2} \right| = 0, \quad b \left| \frac{d^2 x}{dy dz} \right| + a \left| \frac{d^2 x}{dy^2} \right| = 0,$$

oder:

$$\left| \frac{d^2 x}{dy dz} \right|^2 = \left| \frac{d^2 x}{dy^2} \right| \left| \frac{d^2 x}{dz^2} \right|,$$

und $\frac{dy}{dz}$ constant gefunden, wofür auch die zwei Gleichungen:

$$\left| \frac{d^2x}{dy^2} \right| = -\frac{b}{a} \frac{d^2z}{dzdy}, \quad \left| \frac{d^2x}{dz^2} \right| = -\frac{a}{b} \frac{d^2x}{dzdy}$$

gesetzt werden können.

Umgekehrt wird auch aus der Bedingungsgleichung:

$$\left| \frac{d^2x}{dydz} \right|^2 = \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right| \left| \frac{d^2x}{dz^2} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{dy}{dz} \right| = C$$

durch Integration die Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien erster Ordnung, und durch neue Integration die von Differenzialien freie Bedingungsgleichung der cylindrischen Flächen gefunden. Diese Integrationen unterliegen keiner weiteren Schwierigkeit.

Denn es folgt z. B. aus den Gleichungen:

$$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|} = -C,$$

dass: $\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right| = C \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$, oder: $\frac{d}{y} \left| \frac{dz}{dx} \right| = C \frac{d}{y} \left| \frac{dz}{dy} \right|$ sei.

Und daraus folgt, dass:

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = C \left| \frac{dz}{dy} \right| + A \quad (\text{I.})$$

sei. Ferner findet man aus der Gleichung: $\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$, wenn man mit:

$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right| = C \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$ dividirt:

$$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right| = \frac{1}{C} \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right|; \quad \text{also:} \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{1}{C} \frac{d}{dy} \left| \frac{dz}{dx} \right| + B. \quad (\text{II.})$$

1) Die Gleichungen (I.) und (II.) stimmen vollkommen mit einander, und mit den Gleichungen: $1 - a \left| \frac{dx}{dy} \right| - b \left| \frac{dx}{dz} \right| = 0$ etc. etc. überein.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen:

$$\frac{d}{x} \left| \frac{dz}{dx} \right| = C \frac{d}{y} \left| \frac{dz}{dy} \right|; \quad \frac{d}{x} \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{1}{C} \frac{d}{x} \left| \frac{dz}{dx} \right|$$

folgt, dass $\left| \frac{dz}{dx} \right|$ und $\left| \frac{dz}{dy} \right|$ Functionen von einander sind. Denn in den ersten Operationen der Differenzirung wird bewiesen, dass, wenn $\omega = f\alpha$ ist, auch $\frac{d(\omega)}{d\alpha} = f' \alpha \frac{d(\alpha)}{d\alpha}$

sei, und dass umgekehrt die Gleichung gelte: $\frac{d(\alpha)}{d\omega} = \frac{1}{f' \alpha} \frac{d(\omega)}{d\omega}$, oder dass allgemein die

Gleichungen gelten: $\frac{d(\omega)}{d\alpha} = f' \alpha \frac{d(\alpha)}{d\alpha}$ und $\frac{d(\alpha)}{d\omega} = \frac{1}{f' \alpha} \frac{d(\omega)}{d\omega}$.

Sind aber $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dy}\right|$ Functionen von einander, so sind auch $\frac{z-\zeta}{x-\xi}$ und $\frac{z-\zeta}{y-\eta}$ Functionen von einander, oder es findet die Gleichung statt: $\varphi\left|\frac{z-\zeta}{x-\xi}\right|=f\left|\frac{z-\zeta}{y-\eta}\right|$, welches die von Differenzialien freie Bedingungsgleichung der cylindrischen Flächen ist.

V.

Ueber die conischen Flächen.

Ist in den beiden Gleichungen der developpablen Flächen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}; \quad \left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|^2 = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|,$$

die Grösse $\frac{\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}$, oder $\frac{dy}{dx}$ eine constante Grösse, so ist die untersuchte Fläche eine

cylindrische; ist dieser Ausdruck aber eine veränderliche Grösse, so ist die Fläche conisch, wenn noch eine fernere (sogleich zu bestimmende) Bedingungsgleichung statt-

findet. Denn ist: $\frac{\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|} = -\frac{dy}{dx} = u$, worin u eine beliebige Function der veränder-

lichen Grössen x, y, z ausdrücken kann, so folgt, dass $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = u \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$, und aus der Gleichung: $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right|^2 = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ folgt, dass $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = \frac{1}{u} \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen: $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = u \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$, $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = \frac{1}{u} \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$ geht hervor, dass $\left|\frac{dz}{dy}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ gegenseitig Functionen von einander seien.

Denn die Gleichung $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = u \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist mit folgender identisch: $d_y \left|\frac{dz}{dx}\right| = u d_y \left|\frac{dz}{dy}\right|$; und $\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| = \frac{1}{u} \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$ ist identisch mit: $d_x \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{1}{u} d_x \left|\frac{dz}{dx}\right|$; und aus den früheren (bei den cylindrischen Flächen angeführten) Gleichungen: $\omega = f\alpha$, $d(\omega) = f' \alpha d(\alpha)$, $\frac{d(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{f' \alpha} d(\omega)$

folgt, dass: $\left|\frac{dz}{dy}\right| = \varphi \left|\frac{dz}{dx}\right|$, oder dass die beiden partiellen Differenzialien Functionen von einander seien.

Aus den Gleichungen: $d\left|\frac{dz}{dx}\right| = u d\left|\frac{dz}{dy}\right|$, und $u = -\frac{dy}{dx}$ folgt ferner, wenn die willkürlichen Zunahmen dy und dx gleich $\eta - y$, $\xi - x$ gesetzt werden (worin η und ξ die Coordinaten der geraden Linie ausdrücken, in welcher die developpable Fläche geschnitten wird):

$$\begin{aligned} d\left|\frac{dz}{dx}\right| &= -\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right) d\left|\frac{dz}{dy}\right|, \\ \left|\frac{dz}{dx}\right| &= -\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right) \left|\frac{dz}{dy}\right| + \int \frac{dz}{dy} d\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right) + \frac{C}{\xi-x}, \\ \left|\frac{dz}{dx}\right| &= -\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right) \left|\frac{dz}{dy}\right| + \int \left|\frac{dz}{dy}\right| \cdot \left(-\frac{dy}{\xi-x}\right) + \frac{C}{\xi-x}, \\ \left|\frac{dz}{dx}\right| &= -\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right) \left|\frac{dz}{dy}\right| - \frac{z}{\xi-x} + \frac{C}{\xi-x}, \\ (\xi-x) \left|\frac{dz}{dx}\right| + (\eta-y) \left|\frac{dz}{dy}\right| &= -z + C, \end{aligned}$$

für $x=\xi$, $y=\eta$ wird $C=z=\zeta$, und es gilt die Gleichung:

$$(\xi-x) \left|\frac{dz}{dx}\right| + (\eta-y) \left|\frac{dz}{dy}\right| = \zeta - z.$$

Dieses ist aber die Gleichung der tangirenden Ebene zu einem Punkte der gegebenen Fläche. Ist nun (was ein besonderer Fall der vorhergehenden allgemeinen Gleichung ist) diese Gleichung noch gültig, wenn ξ , η , ζ mit einander constant genommen und mit ξ' , η' , ζ' bezeichnet werden, so gehen durch den Punkt: ξ' , η' , ζ' alle tangirenden Ebenen der Fläche. Und diess ist die *eigenthümliche* Gleichung der conischen Flächen. Denn jede Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass alle ihre tangirenden Ebenen durch einen einzigen Punkt gehen, ist eine *conische* Fläche, und dieser Punkt (ξ', η', ζ') ist der Scheitel des Kegels. Jede Fläche ist daher eine conische Fläche, wenn sich drei constante Grössen ξ' , η' , ζ' , so wählen lassen, dass die Gleichung:

$$(\xi'-x) \left|\frac{dz}{dx}\right| + (\eta'-y) \left|\frac{dz}{dy}\right| = \zeta' - z$$

erfüllt wird.

In dieser Ableitung der Eigenschaften der conischen Flächen haben wir zugleich die Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien erster Ordnung gefunden:

$$\left(\frac{\xi'-x}{\zeta'-z}\right) \left|\frac{dz}{dx}\right| + \left(\frac{\eta'-y}{\zeta'-z}\right) \left|\frac{dz}{dy}\right| = 1.$$

Sind nun $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dy}\right|$ Functionen von einander (wie bereits bewiesen ist). so folgt, dass auch $\frac{\xi'-x}{\zeta'-z}$ und $\frac{\eta'-y}{\zeta'-z}$ Functionen von einander seien, oder dass die Gleichung statfinde:

$$\varphi\left(\frac{\xi'-x}{\zeta'-z}\right) = f\left(\frac{\eta'-y}{\zeta'-z}\right),$$

welches die von *partiellen Differenzialien freie Bedingungsgleichung* der conischen Fläche ist. Wenn sich daher in der Gleichung einer gegebenen Fläche drei Constanten ξ' , η' , ζ' so wählen lassen, dass die Gleichung:

$$\varphi\left(\frac{\xi'-x}{\xi'-z}\right)=f\left(\frac{\eta'-y}{\xi'-z}\right)$$

stattfindet, so gehört die Gleichung einer conischen Fläche an.

Bei den Untersuchungen über die conischen Flächen sind allgemein folgende Fragen zu erörtern:

- 1) Nach welchen Kriterien findet man, dass eine gegebene Fläche eine Kegelfläche sei?
- 2) Wie wird der Scheitel eines Kegels bestimmt, wenn die Gleichung der Kegelfläche gegeben ist?
- 3) Wie wird die Lage der geraden Linien bestimmt, in welchen die Kegelfläche geschnitten wird?
- 4) Wie wird die Leitungcurve des Kegels bestimmt?
- 5) Wenn der Scheitel und die Leitungcurve des Kegels gegeben sind, wie wird die Kegelfläche selbst bestimmt?

1. Kriterien der Kegelflächen.

Wir haben für die conischen Flächen die bekannten Bedingungsgleichungen gefunden:

$$(\xi'-x)\left|\frac{dz}{dx}\right|+(\eta'-y)\left|\frac{dz}{dy}\right|=(\xi'-z),$$

und:

$$\varphi\left(\frac{\eta'-y}{\xi'-z}\right)=f\left(\frac{\xi'-x}{\xi'-z}\right),$$

worin ξ' , η' , ζ' die Coordinaten des Scheitels sind.

Viel einfachere und leichtere Kriterien gewähren jedoch die Gleichungen:

$$\frac{\left|\frac{d^2x}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}=u, \text{ und } \frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|}=\frac{1}{u}$$

worin u irgend eine beliebige Function der veränderlichen Grössen x , y , z ausdrückt. — So oft diese Gleichungen mit einander stattfinden, ist die Fläche eine conische Fläche.

2. Bestimmung des Scheitels eines Kegels.

Die Coordinaten des Scheitels eines Kegels können nach jeder der oben entwickelten Reihen der Bedingungsgleichungen gefunden werden. Folgendes Verfahren halten wir aber für das leichteste und einfachste.

Da für den Scheitel des Kegels die tangirende Ebene unbestimmt bleibt, also $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ist, so müssen folgende Gleichungen stattfinden:

$$\frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} = u = \frac{0}{0}; \quad \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|} = \frac{1}{n} = \frac{0}{0},$$

also:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| = 0, \quad \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| = 0, \quad \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen können die drei Coordinaten des Scheitels ξ' , η' , ζ' leicht bestimmt werden.

3. Bestimmung der geraden Linien, in welchen die Kegelflächen geschnitten werden.

Man findet $\frac{dy}{dx} = -u$. Auf dieselbe Art findet man $\frac{dz}{dx} = -\omega$. Daraus werden die Gleichungen abgeleitet:

$$(\eta - y) = -u(\xi - x), \quad (\zeta - z) = -\omega(\xi - x),$$

wodurch die Lage jeder geraden Linie im Punkte x, y, z der gegebenen Fläche bestimmt ist.

4. Bestimmung der Leitungscurve einer Kegelfläche.

Es können unendlich viele Leitungscurven einer Kegelfläche aufgestellt werden, je nachdem die Kegelfläche von einer Ebene oder von einer andern Fläche in beliebiger Richtung durchschnitten wird. Die Verbindung der Kegelfläche und der durchschneidenden Ebene oder Fläche bestimmen die Gleichungen der Leitungscurve. Am Einfachsten ist es, die Kegelfläche durch Ebenen zu durchschneiden, die mit den Coordinatenebenen parallel sind. Dadurch erhält man die Leitungscurven in den Coordinatenebenen, indem man x , oder y , oder z gleich beliebigen Constanten setzt, und die einzigen Werthe ausschliesst, die mit den Coordinaten des Scheitels zusammenfallen. Denn die Leitungscurve im Scheitel ist gleich Null, also unbestimmt.

5. Bestimmung der Kegelfläche aus dem Scheitel und der Leitungscurve.

Diese Aufgabe wird aus der Eigenschaft der conischen Flächen gelöst, nach welcher alle geraden Linien, die durch den Scheitel gezogen werden, auf der Kegelfläche liegen, also die Leitungscurve treffen.

Sind die Gleichungen der Leitungscurve:

$$F(x', y', z') = 0, \quad f(x', y', z') = 0,$$

die Coordinaten des Scheitels, ξ', η', ζ' , und die Coordinaten irgend eines Punktes der Kegelfläche (x, y, z) gegeben, so sind die Gleichungen der geraden Linie, die durch den Scheitel,

einen Punkt der Leitungscurve (x', y', z') und einen Punkt der Kegelfläche (x, y, z) gezogen wird:

$$\frac{x' - \xi'}{z' - \zeta'} = \frac{x - \xi}{z - \zeta} \quad \text{und} \quad \frac{y' - \eta'}{z' - \zeta'} = \frac{y - \eta}{z - \zeta}.$$

Diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen der Leitungscurve $F(x', y', z') = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ verbunden, geben vier Gleichungen, durch welche die Grössen x', y', z' eliminirt werden können. Dadurch erhält man eine neue Gleichung zwischen den Coordinaten der Kegelfläche und des Scheitels, die für alle geraden Linien in der Kegelfläche gilt, und alle Punkte der Kegelfläche selbst bestimmt. Diese Endgleichung ist eine Function von $\frac{x - \xi}{z - \zeta}$ und $\frac{y - \eta}{z - \zeta}$, die auch in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\varphi\left(\frac{x - \xi}{z - \zeta}\right) = f\left(\frac{y - \eta}{z - \zeta}\right) = 0,$$

welches die von Differenzialien freie Bedingungsgleichung der conischen Flächen ist.

Beispiele zu den conischen Flächen.

Beispiel 1. Es sei die Fläche von der Gleichung gegeben:

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 54ax - 72ay + 12az + 189a^2 = 0 = u.$$

Es ist

$$\frac{du}{dx} = 18x - 54a, \quad \frac{du}{dy} = 18y - 72a, \quad \frac{du}{dz} = 12a - 2z.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 18, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 18, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = -2, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0 \text{ etc.}$$

also:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|} = \frac{9x - 27a}{z - 6a}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\left|\frac{du}{dy}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|} = \frac{9y - 36a}{z - 6a}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{9[(z - 6a)^2 - 9(x - 3a)^2]}{(z - 6a)^3}; \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{9[(z - 6a)^2 - 9(y - 4a)^2]}{(z - 6a)^3};$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{9 \cdot 9(x - 3a)(y - 4a)}{(z - 6a)^3}.$$

Nun ist

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = \frac{9^4(x - 3a)^2(y - 4a)^2 - 9^2[(z - 6a)^2 - 9(x - 3a)^2] \cdot [(z - 6a)^2 - 9(y - 4a)^2]}{(z - 6a)^3}.$$

Soll dieser Ausdruck gleich Null sein, so muss die Gleichung

$$81(x - 3a)^2(y - 4a)^2 = (z - 6a)^2 - 9(x - 3a)^2 - 9(y - 4a)^2$$

stattfinden.

Nun folgt aus der gegebenen Gleichung der Fläche, dass

$$(z - 6a)^2 = 9(x - 3a)^2 + 9(y - 4a)^2.$$

Es ist daher

$$81(x-3a)^2(y-4a)^2=9(y-4a)^2 \cdot 9(x-3a)^2,$$

also obiger Ausdruck:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|$$

gleich Null.

Daraus folgt, dass die Fläche developpabel sei. Und da die Ausdrücke: $\frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dx^2}}$ und $\frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dy^2}}$

Functionen erster Ordnung *veränderlicher* Grössen sind, so folgt, dass die Fläche selbst eine conische sei. Es ist nämlich:

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dx^2}} = \frac{x-3a}{y-4a}; \quad \frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dy^2}} = \frac{y-4a}{x-3a}.$$

Zugleich sind die Ausdrücke: $\frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dx^2}}$, $\frac{\frac{d^2 z}{dx dy}}{\frac{d^2 z}{dy^2}}$ einander gleich, welches die Be-

dingungsgleichung der developpablen Flächen ist.

Zur Bestimmung des Scheitels des Kegels dienen die Gleichungen:

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2 z}{dy^2}=0, \quad \frac{d^2 z}{dx dy}=0,$$

woraus die Werthe folgen: $x=\xi'=3a$, $y=\eta'=4a$, $z=\zeta'=6a$.

Die andern Bedingungsgleichungen der Kegelfläche sind:

$$1) \quad (\xi'-x) \left| \frac{dz}{dx} \right| + (\eta'-y) \left| \frac{dz}{dy} \right| = \zeta' - z;$$

$$(3a-x) \cdot \frac{9x-27a}{x-6a} + (4a-y) \cdot \frac{9y-36a}{y-6a} = 6a-z;$$

oder:

$$9(x-3a)^2 + 9(y-4a)^2 = (z-6a)^2,$$

eine Gleichung, die ebenfalls mit der gegebenen Gleichung übereinstimmt.

2) Die von Differenzialien freie Bedingungsgleichung der conischen Fläche ist:

$$f\left(\frac{y-\eta'}{x-\xi'}\right) = \varphi\left(\frac{z-\zeta'}{x-\xi'}\right),$$

oder:

$$f\left(\frac{y-4a}{x-3a}\right) = \varphi\left(\frac{z-6a}{x-3a}\right),$$

eine Gleichung, die ebenfalls stattfindet, da

$$\left(\frac{y-4a}{x-3a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{9} \left(\frac{z-6a}{x-3a}\right)^2 \text{ ist.}$$

Um eine Leitungscurve des Kegels zu bestimmen, durchschneidet man eine Axe, z. B. **Z**, durch eine auf sie senkrechte Ebene, indem man in der Gleichung $z=z$, gleich einer Constante setzt. Daraus folgt:

$$9x^2+9y^2-54x-72y-z'^2+12az'+189a^2=0.$$

Da die Coefficienten von x^2 und y^2 gleich sind, so folgt, dass die Durchschnittscurve jederzeit ein Kreis ist. Die Kegelfläche wird also durch Ebenen, die mit **XY** parallel sind, in Kreisen geschnitten. — Da obige Gleichung auch in:

$$(z'-6a)^2=9(x-3a)^2+9(y-4a)^2$$

zerlegt werden kann, so folgt, dass für alle Durchschnittskreise der Kegelfläche die Werthe, $x-3a$, $y-4a$ auch, $(z'-6a)$ gleich Null machen. Es ist daher der Radius eines jeden Kreises $\frac{z'-6a}{3}$, und die Mittelpunkte aller Kreise liegen in einer und derselben, auf **XY** senkrechten geraden Linie. Der Kegel ist also ein gewöhnlicher senkrechter Kegel. — Die Durchschnitte der Kegelfläche mit Ebenen, die mit **XZ** und **YZ** parallel sind, geben Hyperbeln als Leitungscurven der Kegelfläche.

Bestimmung der Fläche, welche die gegebene Fläche in zweiter Ordnung tangirt.

Die Gleichung der tangirenden Fläche zweiter Ordnung ist:

$$\begin{aligned} z' &= \alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta x^2 + \lambda x' y + \mu y'^2; \\ \delta &= \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{9(z-6a)^2 - 9(x-3a)^2}{2(z-6a)^3} = \frac{81(y-4a)^2}{2(z-6a)^3}; \\ \lambda &= \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{81(x-3a)^2}{2(z-6a)^3}; \\ \mu &= \frac{d^2 z}{dxdy} = \frac{81(x-3a)(y-4a)}{(z-6a)^3} \end{aligned}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung der tangirenden Fläche:

$$z' = \alpha + \beta x' + \gamma y' + \frac{81(y-4a)^2}{2(z-6a)^3} x'^2 + \frac{81(x-3a)(y-4a)}{(z-6a)^3} x' y' + \frac{81(x-3a)^2}{2(z-6a)^3} y'^2.$$

Die tangirende Fläche zweiter Ordnung ist also für den Kegel nicht eine conische, sondern eine cylindrische Fläche, da

$$\frac{\frac{d^2 z'}{dx' dy'}}{\frac{d^2 z'}{dy'^2}} = \frac{y-4a}{(x-3a)}$$

eine constante Grösse ist. Die Coefficienten x und y drücken nämlich die Coordinaten der gegebenen Kegelfläche für denjenigen Punkt aus, für welchen die tangirende Fläche zweiter Ordnung gesucht wird.

Die Coordinaten z' , x' , y' sind die veränderlichen Coordinaten der tangirenden cylindrischen Fläche zweiter Ordnung, die Coordinaten x , y , z sind die Coordinaten

der gegebenen Kegelfläche, und sie sind für jeden bestimmten Punkt dieser Fläche, für welche die tangierende Fläche zweiter Ordnung gesucht wird, constant. Für den Scheitel des Kegels wird z' unbestimmt. Für diesen gibt es also ebensowenig eine bestimmte tangierende Fläche zweiter Ordnung (die überdiess nothwendig in eine Ebene überginge), als es für ihn eine bestimmte tangierende Fläche erster Ordnung (Ebene) giebt.

Beispiel. 2. Es sei die Gleichung der Fläche gegeben:

$$x^3 - xy^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann in folgende umgeändert werden:

$$1 - \frac{x}{z} \frac{y^2}{z^2} = 0, \text{ oder } \left[\frac{x}{z} \right] = \left[\frac{y}{z} \right]^{-2}.$$

Sie entspricht der von Differenzialien freien Bedingungsgleichung der conischen Flächen:

$$\varphi\left(\frac{x-\xi'}{z-\zeta'}\right) = f\left(\frac{y-\eta'}{z-\zeta'}\right)$$

für $\xi'=0$, $\eta'=0$, $\zeta'=0$.

Sie ist daher eine Kegelfläche, deren Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten liegt.

Wird die gegebene Fläche nach der Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien erster Ordnung untersucht, so muss z. B. die Gleichung stattfinden:

$$(z-\zeta') - (x-\xi') \left| \frac{dz}{dx} \right| - (y-\eta') \left| \frac{dz}{dy} \right| = 0.$$

Da

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{1}{3} \frac{y^2}{z^2}; \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{2}{3} \frac{xy}{z^2};$$

so ist

$$(z-\zeta') - (x-\xi') \cdot \frac{y^2}{3z^2} - (y-\eta') \cdot \frac{2xy}{3z^2} = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung findet wirklich statt für: $\zeta'=\xi'=\eta'=0$. Es ist nämlich

$$3z^3 - xy^2 - 2xy^2 = 0, \quad z^3 = xy^2,$$

welches die gegebene Gleichung ist.

Untersucht man endlich diese Fläche nach der Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien zweiter Ordnung, so ist:

$$z = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},$$

und die partiellen Differenzialien nach z können sogleich direct abgeleitet werden.

Es ist:

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{1}{3} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}, \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}, \quad \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| = -\frac{2}{9} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}};$$

$$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right| = \frac{2}{9} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}}}, \quad \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| = -\frac{2}{9} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}.$$

Daraus folgt, dass

$$\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| = \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 = 81 \frac{4}{x^3 y^3}.$$

Die Fläche ist also developpabel, und da zugleich die Gleichung stattfindet:

$$\frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} = -\frac{y}{x} = \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|},$$

so ist sie eine conische Fläche, da der Quotient $-\frac{y}{x}$ eine veränderliche Grösse ist, und die übrigen Bedingungsgleichungen stattfinden.

Für $x=0$, $y=0$, $z=0$ werden die partiellen Differenzialien zweiter Ordnung von z gleich Null, der Scheitel des Kegels liegt daher im Anfangspunkte der Coordinaten.

Die Gleichungen der geraden Linien, in welchen die Kegelfläche geschnitten wird, sind:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \text{ ebenso: } \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \text{ oder: } \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{y}{x}; \frac{\zeta - z}{\xi - x} = \frac{z}{x},$$

wodurch für jeden Punkt x, y, z die Lage der geraden Linie bestimmt ist.

Die Leitungscurven in Ebenen, die mit den Coordinaten-Ebenen parallel sind, werden:

für $x=a$, $ay^2=z^3$, welches die Gleichung einer semicubischen Parabel ist;

für $y=b$, $b^2 x=z^3$, welches die Gleichung einer cubischen Parabel ist;

endlich für $z=c$, $xy^2=c^3$, die Gleichung einer bekannten Curve des dritten Grades.

Die tangirende Fläche zweiter Ordnung ist ohne Schwierigkeit zu bestimmen.

Beispiel 3. Es sei die Schraubenlinie an einem senkrechten Cylinder in den Gleichungen:

$$z = a.r.\text{arc.}\left(\text{tang.}\frac{y}{x}\right), \quad x^2 + y^2 = r^2$$

gegeben, und es soll durch den Anfangspunkt ihrer Coordinaten eine Kegelfläche construirt werden, die durch alle Punkte der Schraubenlinie hindurchgeht.

Auflösung. Da die Coordinaten des Scheitels des Kegels

$$\xi'=0, \eta'=0, \zeta'=0$$

sind, so gelten für die geraden Linien, die durch den Scheitel des Kegels in der Kegelfläche gezogen werden, folgende Gleichungen:

$$x' = \frac{x}{z} z', \quad y' = \frac{y}{z} z'.$$

Ferner sind für die Durchschnittspunkte der Kegelfläche und der Schraubenlinie die gegebenen Gleichungen:

$$z' = a.r.\text{arc.tang.}\frac{y'}{x'}, \quad x'^2 + y'^2 + r^2.$$

Aus diesen vier Gleichungen werden die drei Grössen x' , y' , z' am einfachsten durch folgendes Verfahren eliminiert. Es ist:

$$x' = \frac{x}{z} \cdot a \cdot r \cdot \text{arc.tang.} \frac{y'}{x'}; \quad y' = \frac{y}{z} \cdot a \cdot r \cdot \text{arc.tang.} \frac{y'}{x'};$$

und da $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ ist, so folgt, dass auch die Gleichung stattfindet:

$$x' = \frac{x}{z} \cdot a \cdot r \cdot \text{arc.tang.} \frac{y}{x}; \quad y' = \frac{y}{z} \cdot a \cdot r \cdot \text{arc.tang.} \frac{y}{x}.$$

Nun ist:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 = \frac{x^2 \cdot a^2 r^2}{z^2} \left[\text{arc.tang.} \frac{y}{x} \right]^2 + \frac{y^2 \cdot a^2 r^2}{z^2} \left[\text{arc.tang.} \frac{y}{x} \right]^2,$$

oder:

$$z = a \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{arc.tang.} \frac{y}{x},$$

welches die Gleichung der gesuchten conischen Fläche ist.

Dass diese Fläche wirklich eine conische Fläche sei, davon kann man sich leicht durch Differenzirung überzeugen.

Es ist:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{arc.tang.} \frac{y}{x} - \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{arc.tang.} \frac{y}{x} + \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{ay^2 \text{arc.tang.} \frac{y}{x}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{ax^2 \text{arc.tang.} \frac{y}{x}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2 z}{dxdy} = - \frac{axy \text{arc.tang.} \frac{y}{x}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Daraus folgt, dass:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} = \left| \frac{d^2 z}{dxdy} \right|^2$$

sei. Ueberdiess ist:

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\frac{d^2 z}{dxdy}} = \frac{\frac{d^2 z}{dxdy}}{\frac{d^2 z}{dy^2}} = \frac{y}{x}.$$

Die Fläche ist also developpabel und zugleich eine Kegelfläche, weil $u = \frac{y}{x}$ eine

veränderliche Grösse ist, und die übrigen Bedingungsgleichungen stattfinden. — Die Coordinaten des Scheitels, für welche die zweiten Differenzialien von z einzeln gleich Null werden, sind $y=0$, $x=0$, woraus auch $z=0$ folgt, also $\xi'=0$, $\eta'=0$, $\zeta'=0$.

Eine Leitungcurve der conischen Fläche ist die gegebene Schraubenlinie selbst. Die mit den Coordinaten-Ebenen parallelen Leitungscuren sind folgende:

a) parallel mit XY :

$$z' = a\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arc.tang} \frac{y}{x};$$

Diese Curve ist die hyperbolische Spirale, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt der geradlinigen Coordinaten die Polar-Coordinaten durch die Gleichungen:

$$v = \operatorname{arc.tang} \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

substituirt. Denn man erhält: $\frac{z'}{a} = rv$. Diese Curve bewegt sich rotatorisch unendlich-mal um den Anfangspunkt, d. h. um den Punkt z' in der Axe Z , ohne ihn je erreichen zu können. Für $z'=0$ geht diese Spirale selbst in einen Punkt, d. h. in den Scheitelpunkt des Kegels über. Die Kegelfläche windet sich daher selbst unendlich-mal um die Axe Z , ohne sie zu treffen, ausser im Scheitelpunkt des Kegels, woraus die Gestalt der Kegelfläche vollkommen begriffen werden kann.

b) Der Durchschnitt der Kegelfläche parallel mit XZ giebt die Curve:

$$z = \pm a\sqrt{y'^2 + x^2} \operatorname{arc.tang} \frac{y'}{x}$$

Diese Curve besteht aus unzählig vielen getrennten Curven von denselben Coordinatengleichungen, da die Function $\operatorname{arc.tang} \frac{y'}{x}$ unzählig viele Werthe haben kann. Für $y'=0$, wenn also die Durchschnittsebene durch die Axe Z geht, verwandelt sich die Curve in

$$z = \pm ax(\operatorname{arc.tang} = 0), \quad z = ax(2n\pi), \quad z = ax(2n+1)\pi.$$

Die Curve besteht also aus unzählig vielen geraden Linien, die sich in dem Punkte $x=z=0$, d. h. im Scheitel des Kegels sämmtlich durchschneiden.

c) Der Durchschnitt der Kegelfläche parallel mit YZ giebt ganz ähnliche Curven von der Gleichung:

$$z = \pm \sqrt{x'^2 + y^2} \operatorname{arc.tang} \frac{y}{x'}.$$

Für $x'=0$ giebt die Gleichung wieder unzählig viele gerade Linien:

$$x' = ay \left[\frac{2n-1}{2} \right] \pi, \quad z' = ay \left[\frac{2n+1}{2} \right],$$

die sich sämmtlich im Scheitel des Kegels selbst durchschneiden.

Anmerkung. Die Bedingungsgleichungen der conischen Flächen können auch unmittelbar durch geometrische Betrachtungen gefunden werden.

VI.

Ueber die Evolutions-Flächen.

Evolutionen-Flächen nennen wir solche Flächen, in welchen die sämtlichen Tangenten einer Curve doppelter Krümmung liegen. Diese Flächen gehören ebenfalls zu den geradlinig krummen Flächen, weil sie in geraden Linien (in den Tangenten der Curve) geschnitten werden können.

Wir suchen die drei Bedingungsgleichungen dieser Flächen: die Bedingungsgleichung ohne Differenzialien, die mit Differenzialien erster Ordnung, und die mit Differenzialien zweiter Ordnung.

Um sogleich die Gleichungen *aller* geradlinig krummen Flächen abzuleiten, so sei allgemein eine Fläche gegeben, die in jedem Punkte in einer geraden Linie geschnitten werden kann, z. B. im Punkte *a* in der Linie *ah*. Die Projection der Linie *ah* auf die Ebene *XY* sei *a'b*; und ihre Projection auf die Ebene *XZ* sei *a''o*. Drücken ξ, η, ζ die Coordinaten dieser geraden Linie, und x, y, z die Coordinaten der gegebenen Fläche im Punkte *a* aus, so sind die Gleichungen dieser geraden Linie:

$$(y-\eta)=m(x-\xi); (z-\zeta)=n(x-\xi).$$

Für jede andere gerade Linie, z. B. *Kp*, gelten die Gleichungen:

$$(y-\eta')=m'(x-\xi'); (z-\zeta')=n'(x-\xi');$$

und da diese geraden Linien weder parallel sind (wie bei cylindrischen Flächen), noch sich in einem gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden (wie bei conischen Flächen), so zeigt schon der blosse Augenschein, dass: (ξ, η, ζ, m, n) , $(\xi', \eta', \zeta', m', n')$ für die verschiedenen geraden Linien veränderliche Grössen seien, die allgemein von den Coordinaten-Werthen (x, y, z) jedes Punktes der gegebenen Fläche abhängen. Ist daher $\xi=\alpha$ eine Function von (x, y, z) , so ist $\eta=F\alpha$, $\zeta=f\alpha$, und es gelten die Gleichungen:

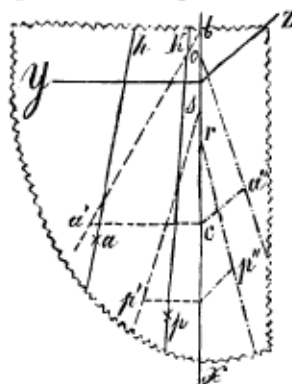
$$(y-F\alpha)=m(x-\alpha); (z-f\alpha)=n(x-\alpha).$$

Da *m* und *n* gegenseitig Functionen von einander sind, so müssen auch $\frac{y-F\alpha}{x-\alpha}$ und $\frac{z-f\alpha}{x-\alpha}$ Functionen von einander sein, und es muss die Gleichung gelten:

$$\phi \left| \frac{y-F\alpha}{x-\alpha} \right| = \Omega \left| \frac{z-f\alpha}{x-\alpha} \right|, \quad (1.)$$

welches die von Differenzialien freie Bedingungsgleichung aller geradlinig krummen Flächen ist.

2) Um die Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien des ersten Grades zu finden, bildet man von einer Linie, z. B. *ah*, in ihren beiden Projectionen *a'b* und *a''o* folgende Gleichungen:



$$dy:dx=y-F\alpha:x-\alpha; \quad dz:dx=z-f\alpha:x-\alpha,$$

Gleichungen, die aus den ersten Lehrsätzen der Differenzialien ebener Curven hinlänglich bekannt sind.

Wird nun z. B. z als Function von x und y genommen, so ist:

$$dz = \left| \frac{dz}{dx} \right| dx + \left| \frac{dz}{dy} \right| dy, \text{ oder } \frac{dz}{dx} = \left| \frac{dz}{dx} \right| + \left| \frac{dz}{dy} \right| \frac{dy}{dx}.$$

Werden die Werthe $\frac{dx}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ substituirt, so folgt die Gleichung:

$$\frac{z-f\alpha}{x-\alpha} = \left| \frac{dz}{dx} \right| + \left| \frac{dz}{dy} \right| \left(\frac{y-F\alpha}{x-\alpha} \right);$$

oder:

$$(z-f\alpha) = \left| \frac{dz}{dx} \right| (x-\alpha) + \left| \frac{dz}{dy} \right| (y-F\alpha), \quad (\text{II.})$$

welches die zweite Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien erster Ordnung für alle geradlinig krummen Flächen ist.

Die dritte Bedingungsgleichung mit partiellen Differenzialien zweiter Ordnung ist bereits bekannt:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| + 2 \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right| \frac{dy}{dx} + \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0. \quad (\text{III.})$$

Zusatz. Da alle drei Bedingungsgleichungen der geradlinig-krummen Flächen richtig sind, so müssen sie mit einander übereinstimmen. Es ist daher zu untersuchen, wie jede aus jeder andern direct abgeleitet werden könne.

Geht man von der zweiten Gleichung aus:

$$(z-f\alpha) = \left| \frac{dz}{dx} \right| (x-\alpha) + \left| \frac{dz}{dy} \right| (y-F\alpha),$$

und eliminirt man aus ihr ein partielles Differenzial, z. B. $\left| \frac{dz}{dy} \right|$ vermöge der Gleichung

$$\left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{dz}{dy} - \left| \frac{dz}{dx} \right| \frac{dx}{dy},$$

so geht die Gleichung hervor:

$$dz - \left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha} \right) dy = \left| \frac{dz}{dx} \right| \left(dx - \frac{x-\alpha}{y-F\alpha} dy \right). \quad (\odot)$$

Nun ist:

$$dz - \left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha} \right) dy = (y-F\alpha) d \left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha} \right) - \left(\left[\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha} \right] dF\alpha - df\alpha \right) = A-M.$$

Ebenso ist:

$$dz - \left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha} \right) dy = (y-F\alpha) d \left(\left[\frac{x-\alpha}{y-F\alpha} \right] dF\alpha - d\alpha \right) = B-N.$$

Es ist also aus der Gleichung $(\odot)$:

$$A-M = \left| \frac{dz}{dx} \right| B - \left| \frac{dz}{dx} \right| N.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden Gleichungen:

$$A = \left| \frac{dz}{dx} \right| B \text{ (I.)}; \quad M = \left| \frac{dz}{dx} \right| N. \text{ (II.)}$$

Denn die Gleichung (I.) giebt:

$$d\left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha}\right) = \left| \frac{dz}{dx} \right| d\left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right),$$

eine Differenzial-Gleichung, in der $\left| \frac{dz}{dx} \right|$ und $\left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right)$ Functionen von einander sein müssen, wenn diese Gleichung möglich sein soll.

Ebenso giebt Gleichung (II.), wenn da , dfa , dFa in einer und derselben Durchschnittslinie der geradlinig krummen Fläche genommen werden, wo also $\frac{da}{dFa}$ und $\frac{dfa}{dFa}$ constante Grössen, x und x' sind, die Gleichung:

$$\left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha}\right)^{-x'} = \left| \frac{dz}{dx} \right| \left(\left[\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right]^{-x}\right).$$

Wird diese Gleichung in Beziehung auf α , $f\alpha$, $F\alpha$, differenzirt, so folgt:

$$d\left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha}\right) = \left| \frac{dz}{dx} \right| d\left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right),$$

welche mit der Gleichung (I.) vollkommen übereinstimmt. Das Integral dieser Gleichung ist, wenn die Constanten mit in die Function genommen werden:

$$\Phi\left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha}\right) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right),$$

eine Gleichung, die mit der gefundenen ersten Bedingungsgleichung vollkommen übereinstimmt.

Differenzirt man aber die zweite Bedingungsgleichung, und nimmt man wieder aus denselben Gründen $d\alpha$, dfa , dFa als constante Grössen, so ist:

$$d(z-f\alpha) = d\left((x-\alpha)\left|\frac{dz}{dx}\right| + (y-F\alpha)\left|\frac{dz}{dy}\right|\right),$$

$$dz = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + (x-\alpha)\left(\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| dx + \left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| dy\right) + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy + (y-F\alpha)\left(\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| dx + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy\right).$$

Da nun

$$dz = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy, \text{ und } \frac{x-\alpha}{y-F\alpha} = \frac{dx}{dy}$$

ist, so folgt, dass

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2z}{dx dy}\right| dx dy + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2 = 0 \quad \text{(III.)}$$

sei, welches die dritte Bedingungsgleichung der windschiefen Flächen ist.

Aus dieser Ableitung geht hervor, dass die drei Gleichungen (I, II, III) für alle geradlinig krummen Flächen gelten, wie sie auch in dieser Allgemeinheit entwickelt worden sind. — Es entsteht nun die Frage, worin sich die vier Arten der geradlinig

krummen Flächen, die cylindrischen, conischen, evolutorischen und windschiefen Flächen unterscheiden. Die cylindrischen, conischen und evolutorischen Flächen haben die dritte Bedingungsgleichung gemeinschaftlich, aber sie unterscheiden sich in den beiden ersten Bedingungsgleichungen; denn diese Gleichungen sind für die cylindrischen und conischen Flächen blosse besondere Fälle der allgemeinen Gleichungen der evolutorischen Flächen. So ist z. B. in der ersten Bedingungsgleichung der evolutorischen Flächen:

$$\phi\left(\frac{z-f\alpha}{y-F\alpha}\right)=\Omega\left(\frac{x-\alpha}{y-F\alpha}\right)$$

für cylindrische Flächen:

$$F\alpha=m-y, f\alpha=ay, \alpha=by,$$

also:

$$\phi\left(\frac{z-ay}{m}\right)=\Omega\left(\frac{x-by}{m}\right),$$

welches die erste Bedingungsgleichung der cylindrischen Flächen ist.

Für conische Flächen ist:

$$f\alpha=c, F\alpha=b, \alpha=a,$$

welches die drei constanten Coordinaten der Spitze des Kegels sind, und die Gleichung geht in folgende über:

$$\phi\left(\frac{z-c}{y-b}\right)=\Omega\left(\frac{x-a}{y-b}\right);$$

wie bereits für conische Flächen gefunden worden ist, etc. etc.

Dagegen haben die evolutorischen Flächen mit den windschiefen Flächen die ersten zwei Bedingungsgleichungen gemeinschaftlich, unterscheiden sich aber in der dritten Bedingungsgleichung von ihnen, indem für die evolutorischen Flächen die Gleichungen:

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| + 2\left|\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right| + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}\right| = 0, \text{ und } \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|;$$

für die windschiefen Flächen aber die Gleichungen:

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| + 2\left|\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right| + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}\right| = 0, \text{ und } \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$$

stattfinden, in denen sie sich hinlänglich von einander unterscheiden.

Zusatz. Für die evolutorischen Flächen hat also $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung (III.) nur einen Werth, da

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$$

ist; für die windschiefen Flächen hat aber $\frac{dy}{dx}$ zwei reelle Werthe, da

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|;$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} \pm \sqrt{\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|^2}}$$

ist. Die evolutorischen Flächen können also von einer tangirenden Ebene nur in einer Richtung $\left| \frac{dy}{dx} \right|$, und die windschiefen Flächen können von dieser Ebene in zwei Richtungen durchschnitten werden.

Lehrsatz. Jede Fläche, in welcher die sämtlichen Tangenten einer Curve doppelter Krümmung liegen, ist eine *evolutorische* Fläche, und für sie gelten die drei oben aufgestellten Bedingungsgleichungen.

Beweis. Die zwei Gleichungen einer Curve doppelter Krümmung können immer auf die Gleichungen zweier Projectionen zurückgeführt gedacht werden, z. B. $y = Fx$, $z = fx$. Die beiden Gleichungen ihrer Tangenten sind dann, wie bekannt:

$$(z - z') = (x - x') \frac{dz'}{dx'}; \quad (y - y') = (x - x') \frac{dy'}{dx'}.$$

Substituirt man nun in der partiellen Differenzial-Gleichung:

$$\frac{dz'}{dx'} = \left| \frac{dz'}{dx'} \right| + \left| \frac{dz'}{dy'} \right| \frac{dy'}{dx'}$$

die Werthe:

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{z - z'}{x - x'}, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{y - y'}{x - x'};$$

so folgt:

$$z - z' = (x - x') \left| \frac{dz'}{dx'} \right| + (y - y') \left| \frac{dz'}{dy'} \right|.$$

Setzt man $x' = \alpha$ als veränderlich, so ist $y' = F\alpha$ und $z' = f\alpha$, und obige Gleichung geht in folgende über:

$$z - f\alpha = (x - \alpha) \left| \frac{dz'}{dx'} \right| + (y - F\alpha) \left| \frac{dz'}{dy'} \right|,$$

welches die zweite Bedingungsgleichung der evolutorischen Flächen ist. Aus dieser ergeben sich dann die erste und die dritte Bedingungsgleichung von selbst. Und dass auch überdiess:

$$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$$

sei, geht daraus hervor, dass $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ in den Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|} \pm \sqrt{\frac{\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2}{\left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|}}; \text{ etc.}$$

nur einen einzigen Werth haben können, weil die Tangenten jeder Curve nur eine einzige bestimmte Lage haben. Wäre nun $\left| \frac{d^2z}{dy dx} \right|$ nicht gleich $\left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$, so würden zwei verschiedene Werthe für $\frac{dy}{dx}$ hervorgehen, was unmöglich ist.

Lehrsatz. Es gilt auch der umgekehrte Satz, dass jede Fläche, für welche die drei oben aufgestellten Bedingungsgleichungen gelten, eine solche Fläche sei, in welcher die Tangenten einer Curve doppelter Krümmung liegen. (Ausgeschlossen sind davon die cylindrischen und conischen Flächen, in welchen α , $f\alpha$, $F\alpha$ entweder constante oder veränderliche Grössen in der ersten Potenz sind.)

Beweis. Gehen wir von der dritten Bedingungsgleichung aus, so folgt aus:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|$$

durch Integration (pag. 36):

$$(x-x') \left| \frac{dz'}{dx'} \right| + (y-y') \left| \frac{dz'}{dy'} \right| = z-z'.$$

Wird statt des partiellen Differenzials $\left| \frac{dz'}{dx'} \right|$ die Gleichung substituiert:

$$\left| \frac{dz'}{dx'} \right| = \frac{dz'}{dx'} - \left| \frac{dz'}{dy'} \right| \frac{dy'}{dx'},$$

so zerlegt sich obige Gleichung in:

$$(x-x') \frac{dz'}{dx'} = z-z' \text{ und } (x-x') \frac{dy'}{dx'} = y-y',$$

und diese beiden Gleichungen bestimmen die Tangenten einer Curve doppelter Krümmung im Punkte (x', y', z') .

Jede Fläche, für welche die dritte Bedingungsgleichung gilt, ist daher eine Fläche, in der sämtliche Tangenten einer Curve liegen, d. h. sie ist eine evolutorische Fläche. Die cylindrischen und conischen Flächen erscheinen demnach bloss als *singuläre* Fälle der allgemeinen evolutorischen Flächen.

Definition. Die Curve doppelter Krümmung, deren Tangenten sämtlich in einer (gegebenen) evolutorischen Fläche liegen, wird die *Wendungscurve* dieser Fläche genannt.

Aufgabe. Wenn eine evolutorische Fläche gegeben ist, so soll ihre Wendungscurve gefunden werden.

Auflösung. Da die geraden Linien der evolutorischen Fläche zugleich Tangenten in jedem Punkte der Wendungscurve sind, so sind die Werthe $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, welche die geraden Linien der Fläche bestimmen, zugleich solche Werthe, welche die Tangenten der Wendungscurve bestimmen, die also auch der Wendungscurve angehören. Man bestimmt daher nach den obigen Formeln:

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} = \varphi, \quad \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx dz} \right|}{\left| \frac{d^2 y}{dz^2} \right|} = \omega.$$

Integrirt man die Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \varphi$, $\frac{dz}{dx} = \omega$, so erhält man die Gleichungen zweier Flächen, deren Durchschnitte die gesuchte Wendungscurve der evolutorischen Fläche geben.

Zusatz. Die beiden Differenzial-Gleichungen: $\frac{dy}{dx} = \varphi$, $\frac{dz}{dx} = \omega$, können auch in eine Gleichung vereinigt werden: $\psi(dx, dy, dz, x, y, z, C) = 0$, deren Integral die Gleichung einer

Fläche giebt, die in Verbindung mit der gegebenen Fläche die gesuchte Wendungscurve bestimmt.

Aufgabe. Ist eine Curve (Wendungscurve) gegeben, so soll die Gleichung ihrer evolutorischen Fläche gefunden werden

Auflösung. Es seien die Gleichungen der Wendungscurve gegeben:

$$f(x', y', z') = 0; \quad F(x', y', z') = 0;$$

so sind die Gleichungen ihrer Tangenten:

$$z - z' = (x - x') \frac{dz'}{dx'}; \quad (y - y') = (x - x') \frac{dy'}{dx'}.$$

Da die Tangenten der Wendungscurve zugleich in der evolutorischen Fläche liegen, so sind: $\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx}$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$.

Bestimmt man also aus den beiden Gleichungen: $f(x', y', z') = 0$, $F(x', y', z') = 0$ z. B. z' und y' als Functionen von x' , $z' = \varphi x'$, $y' = \psi x'$, und setzt man $x' = \alpha$, so sind die Gleichungen der Tangenten:

$$(z - \varphi \alpha) = (x - \alpha) \frac{dz}{d\alpha}; \quad (y - \psi \alpha) = (x - \alpha) \frac{dy}{d\alpha}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse α , so erhält man eine von den einzelnen Werthen von α , $\varphi \alpha$, $\psi \alpha$, unabhängige Fläche, in der also nicht bloss eine, sondern alle Tangenten der Wendungscurven liegen, die daher die gesuchte evolutorische Fläche selbst ist.

Bei den evolutorischen Flächen bieten sich dieselben Fragen dar, wie bei den cylindrischen und conischen Flächen, nämlich: wie entschieden werden könne, ob eine Fläche evolutorisch sei, oder nicht; wie die Lage der geraden Durchschnittslinien und der Wendungscurve bestimmt, und wie aus der gegebenen Wendungscurve die evolutorische Fläche selbst bestimmt werden könne. Sämmtliche Fragen sind in den vorhergehenden Lehrsätzen bereits gelöst worden, und es bleibt nur noch übrig, sie der Reihe nach in einem Beispiele auszuführen.

Beispiel zu den Evolutions-Flächen.

Es soll die Gleichung der *evolutorischen* Fläche gebildet werden, in der alle Tangenten einer gegebenen Wendungscurve: $\left(x = \frac{z^2}{p}, y = \frac{z^3}{p^2}\right)$ liegen. (Diese Fläche, welche die *Evolute* der gegebenen Curve enthält, ist eine evolutorische Fläche.)

1) Die Gleichungen der Tangente einer Curve im Punkte (x', y', z) sind, wie bekannt:

$$(x - x') = (z - z') \left| \frac{dx'}{dz'} \right|; \quad (y - y') = (z - z') \left| \frac{dy'}{dz'} \right|.$$

Da

$$\left| \frac{dx'}{dz'} \right| = \frac{2z'}{p}, \quad \left| \frac{dy'}{dz'} \right| = \frac{3z'^2}{p^2},$$

so gehen obige Gleichungen, wenn: $x' = \frac{z'^2}{p}$, $y' = \frac{z'^3}{p^2}$, substituirt wird, in folgende über:

$$px + z'^2 - 2z'z = 0, \quad p^2y + 2z'^3 - 3z'^2z = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Grösse z' , so erhält man zuletzt:

$$\frac{2p^2x^2 - 2pxz^2}{4z^3 - 5pxz + p^2y} = z', \quad \frac{pxz - p^2y}{2z' - 2px},$$

oder:

$$4yz^3 - 3x^2z^2 - 6pxyz + 4px^3 + p^2y^2 = 0 = u,$$

welches die gesuchte Gleichung der evolutorischen Fläche ist.

2) Diese Fläche ist evolutorisch, weil die Ausdrücke:

$$\left| \frac{d^2z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|; \quad \left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|^2 - \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right| \text{ etc.}$$

gleich Null sind. Denn löst man die Gleichung u z. B. nach y auf, so findet man:

$$y^2 + \left(\frac{4z^3 - 6pxz}{p^2} \right) y = \frac{3x^2z^2 - 4px^3}{p^2},$$

und

$$y = \frac{3pxz - 2z^3}{p^2} + \frac{2}{p^2} \sqrt{(z^2 - px)^3}.$$

Der doppelte Werth von $\sqrt{(z^2 - px)^3}$ zeigt an, dass die Fläche zwei verschiedene Coordinaten y für dieselben Werthe z und x habe, dass sie also in verschiedenen Coordinatenräumen liege. Nehmen wir den einen Werth dieser Coordinate, z. B. den mit der positiven Wurzel, so ist:

$$y = \frac{3pxz - 2z^3 + 2\sqrt{(z^2 - px)^3}}{p^2};$$

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{3}{p} (z - \sqrt{z^2 - px}); \quad \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{3}{p^2} (px - 2z^2 + 2z\sqrt{z^2 - px});$$

$$\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| = \frac{3}{2\sqrt{z^2 - px}}; \quad \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right| = \frac{3}{p^2} \left(-4z + \frac{4z^2 - 2px}{\sqrt{z^2 - px}} \right); \quad \left| \frac{d^2y}{dx dz} \right| = \frac{3}{p} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - px}} \right).$$

Nun ist

$$\left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|^2 = \frac{9}{p^2} \left(1 - \frac{2z}{\sqrt{z^2 - px}} + \frac{z^2}{z^2 - px} \right)$$

und

$$\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right| = \frac{9}{p^2} \left(\frac{-2z}{\sqrt{z^2 - px}} + \frac{2z^2 - px}{z^2 - px} \right) = \frac{9}{p^2} \left(1 - \frac{2z}{\sqrt{z^2 - px}} + \frac{z^2}{z^2 - px} \right).$$

Es ist daher:

$$\left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|^2 = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|,$$

und die gefundene Fläche ist entweder eine cylindrische, conische oder evolutorische Fläche. Da nun

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|} = \frac{p(\sqrt{z^2 - px} - z)}{2(2z^2 - px - 2z\sqrt{z^2 - px})} = \frac{p}{2(\sqrt{z^2 - px} - z)} \quad (\beta)$$

so folgt, dass die Fläche eine evolutorische sei, da $\frac{dz}{dx}$ weder eine constante Grösse, noch eine Function erster Ordnung von veränderlichen Grössen ist.

3) Um die Lage der geraden Linien zu bestimmen, in denen die (jetzt als gegeben angenommene) Fläche $u=0$ geschnitten werden kann, sucht man die Werthe $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$. Man findet (β):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p}{2(\sqrt{z^2 - px} - z)}.$$

Ebenso findet man $\frac{dz}{dy}$ (oder $\frac{dy}{dx}$) aus den Formeln:

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{\left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|}{\left| \frac{d^2x}{dz^2} \right|} \text{ etc.}$$

Sind diese Werthe gefunden, so sind die Gleichungen der geraden Durchschnittslinien der Fläche:

$$x - x' = (z - z') \frac{dx'}{dz'}, \quad y - y' = (z - z') \frac{dy'}{dz'},$$

worin x, y, z die Coordinaten der Linie, und x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind, in der sie in der gefundenen geraden Linie geschnitten werden kann.

4) Ist endlich die Fläche u gegeben, und sucht man ihre Wendungcurve, so findet man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{pz}{2(\sqrt{z^2 - px} - z)}, \quad dz = \frac{pdx}{2z - 2\sqrt{z^2 - px}}.$$

Wird diese Gleichung integrirt, so findet man: $z^2 = px$. In der That giebt dieser Werth in die Gleichung: $dz = \frac{pdx}{2z - 2\sqrt{z^2 - px}}$ substituirt: $dz = \frac{p}{2z} dx$, und $z^2 = px$. (I.)

Auf dieselbe Art bestimmt man $\frac{dz}{dy}$, und findet durch Integration die Gleichung zwischen z und y , diese ist: $z^2 = p^2 y$. (II.) Die Gleichungen (I.) und (II.) geben die gesuchte Wendungcurve.

Zusatz. Es bedarf keiner weiteren Ausführung, dass die tangirenden Flächen zweiter Ordnung auch für die evolutorischen Flächen *parabolische Cylinder* seien, wie für die cylindrischen und conischen Flächen. Denn da die entscheidenden Co-

efficienten der Gleichung der tangirenden Flächen zweiter Ordnung von den Werthen, $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$, $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$, $\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|$ abhängen, und da für die evolutorischen Flächen dieselbe Gleichung gilt, wie für die cylindrischen und conischen Flächen, nämlich:

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = 0,$$

so geht auch die Gleichung eines parabolischen Cylinders als die Gleichung der tangirenden Fläche zweiter Ordnung für die evolutorischen Flächen hervor. Die Aufstellung dieser Gleichung unterliegt keinen weiteren Schwierigkeiten.

VII.

Ueber die windschiefen Flächen.

Da die windschiefen Flächen auch zu den geradlinig krummen Flächen gehören, so gelten für sie die drei Bedingungsgleichungen der developpablen Flächen:

$$\phi = \left(\frac{y - Fa}{x - a}\right) = \Omega\left(\frac{z - fa}{x - a}\right).$$

$$z - fa = (x - a) \left|\frac{dz}{dx}\right| + (y - Fa) \left|\frac{dz}{dy}\right|,$$

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| + 2 \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right| \frac{dy}{dx} + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| \frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Sie unterscheiden sich aber von diesen durch die Gleichung:

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|.$$

Alles Uebrige wird bei den windschiefen Flächen auf dieselbe Art abgeleitet und bewiesen, wie bei den evolutorischen Flächen.

Es sind daher im Allgemeinen folgende Fragen zu erörtern:

1) Wenn die Gleichung einer Fläche gegeben ist, nach welchen Kriterien wird entschieden, ob diese Fläche windschief sei, oder nicht?

2) Da jede Fläche in einem gegebenen Punkte *allgemein* nur nach einer Richtung in geraden Linien durchschnitten werden kann, die Endgleichung der windschiefen Flächen aber zwei Richtungen angiebt, von denen die eine die Richtung der geraden Linie, die andere aber nur die Richtung von Durchschnittscurven angeben kann, so entsteht die Frage, wie entschieden werden könne, welches die Richtung der geraden Linie, und welches die Richtung jener Durchschnittscurven sei?

3) Wie findet man aus der gegebenen Gleichung einer windschiefen Fläche die Gesetze, nach welchen sich die gerade Linie auf dieser Fläche fortbewege, und durch eine Leitungscurve gehe?

4) Wenn aber diese Gesetze gegeben sind, wie findet man aus ihnen die Gleichung der windschiefen Fläche selber?

ad 1) Was die erste Frage anbelangt, so ist sie aufs Leichteste zu beantworten. Man nimmt die zweiten partiellen Differenzialien einer Coordinate, z. B. z , und untersucht den Ausdruck:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|.$$

Ist dieser Ausdruck positiv, so ist die Fläche windschief. (Ist dieser Ausdruck gleich Null, so ist die Fläche developpabel; ist er negativ, so ist die Fläche eine doppelt krumme Fläche.) Dieser Ausdruck ist immer positiv, wenn $\frac{d^2 z}{dx^2}$ und $\frac{d^2 z}{dy^2}$ einzeln verschiedene Zeichen haben. Aber auch, wenn diese Differenzialien gleiche Zeichen haben und

$$\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| < \left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2$$

ist, bleibt der Ausdruck positiv, und die Fläche bleibt eine windschiefe Fläche.

ad 2) Was die zweite Frage betrifft, so findet man, wenn z. B. z als Function von x und y genommen wird:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|} \pm \frac{\sqrt{\left(\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 - \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right| \right)}}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|}$$

In diesem Ausdrucke hat $\frac{dy}{dx}$, da die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv ist, zwei Werthe. Um entscheiden zu können, welcher Werth der Richtung der geraden Linie, und welcher Werth den Tangenten der Durchschnittscurven angehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial $d^3 z$. Derjenige Werth, welcher das dritte Differenzial gleich Null macht, zeigt die Richtung der geraden Linie an (da die höheren Differenzialien der geraden Linie insgesamt gleich Null sind), und derjenige Werth, welcher das dritte Differenzial nicht gleich Null macht, zeigt die Richtung der Tangenten der Durchschnittscurven in diesem Punkte an, für welche zwar *singulär* $d^2 z$, nicht aber auch $d^3 z$, noch auch die höheren Differenzialien gleich Null sind. Der zweite Werth von $\frac{dy}{dx}$ gehört daher der Tangente aller dieser Curven an.

ad 3) Was die dritte Frage betrifft, wie die Gleichungen der geraden Linie gefunden werden, durch deren Fortbewegung die windschiefe Fläche beschrieben wird, so entscheidet man zuerst, welcher der Werthe $\frac{dy}{dx}$ der geraden Linie angehöre. Ist dieser Werth z. B. gleich fa , so ist, wenn η und ξ die Coordinaten der geraden Linie ausdrücken, $\eta - y = (\xi - x)fa$. (I.) Auf dieselbe Art bestimmt man nun ein zweites Differenzial, z. B. $\frac{dz}{dx}$, und findet den Werth, der zu der geraden Linie gehört, $\frac{dz}{dx} = \varphi a$; dann ist, wenn ζ , ξ die Coordinaten der geraden Linie ausdrücken: $\zeta - z = (\xi - x)\varphi a$. (II.)

Diese beiden Gleichungen bestimmen alle geraden Linien der windschiefen Flächen; und die Functionen fa und φa bestimmen die Gesetze, nach welchen sich die gerade

Linie auf der windschiefen Fläche fortbewegt. — Der zweite Werth von $\frac{dz}{dx}$ gehört wieder der Tangente der Durchschnittscurven an. Die Lage dieser Tangente ist durch die beiden Gleichungen ebenso bestimmt, wie die Lage der geraden Linie.

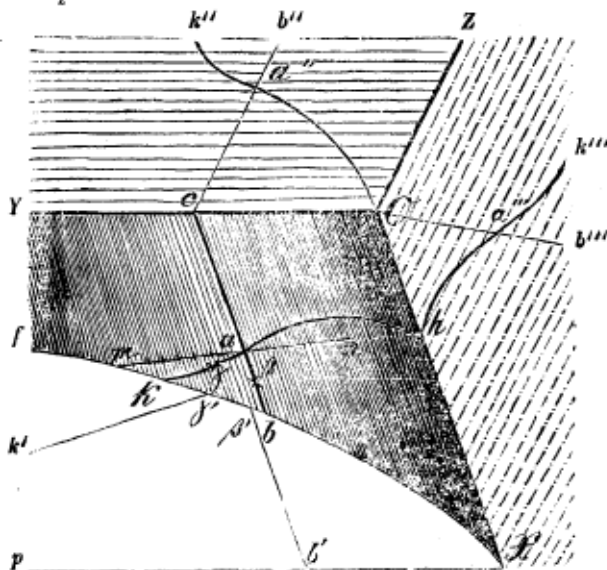
ad 4) Was die vierte Frage betrifft, so wird sie auf folgende Art gelöst:

Es seien $F(x', y', z') = 0$, und $\varphi(x', y', z') = 0$ die Gleichungen einer Leitungscurve. und $(\eta - y) = (\xi - x)fa$, $\zeta - z = (\xi - x)\varphi a$ die Gleichungen der geraden Linie. Da a selbst eine beliebige Function von x', y', z' , und für alle Punkte der Leitungscurve $\xi = x'$, $\eta = y'$, $\zeta = z'$ ist, so sind vier Gleichungen gegeben, aus welchen die drei Grössen x' , y' , z' eliminirt werden können. Es bleibt noch eine Endgleichung der drei Grössen x , y , z übrig, welches die gesuchte Gleichung der windschiefen Fläche ist.

Ausser diesen Aufgaben, die sich auf gleiche Weise auch bei den cylindrischen, conischen und evolutorischen Flächen dargestellt haben, sind bei den windschiefen Flächen noch folgende zu lösen:

5) Die windschiefen Flächen können in allen Punkten durch gerade Linien geschnitten werden, die ihren Richtungen nach durch die ersten Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ bestimmt werden. Diese ersten Werthe bezeichnen wir durch ω_1 und ω_2 , im Gegensatze zu ω_3 und ω_4 , welche die zweiten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ darstellen. — In allen Punkten können aber die windschiefen Flächen auch durch Curven geschnitten werden, deren Coordinaten ebenfalls das zweite Differenzial d^2z gleich Null machen, und deren Tangenten durch ω_3 und ω_4 vollkommen bestimmt sind.

6) Wird in einer windschiefen Fläche, für welche in einem beliebigen Punkte a die ersten Werthe (ω_1, ω_2) die gerade Linie cb , und die zweiten Werthe (ω_3, ω_4) die



gerade Linie mu geben, durch mu senkrecht auf der Ebene XY , also in der Coordinate z eine Ebene gelegt, so durchschneidet sie die windschiefe Fläche in der Curve kah ,

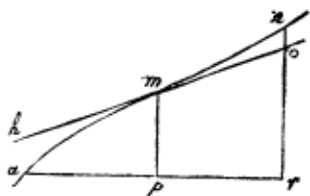
welche nothwendiger Weise im Punkte a einen Inflexionspunkt hat. (Bei windschiefen Flächen der zweiten Ordnung ist diese Curve selbst eine gerade Linie, für welche ebenfalls $d^2z=0$ ist.)

Beweis. Wird in dem Punkte a durch die Coordinate z eine Ebene gelegt, und giebt sie als Durchschnitt die Curve hak , so können die Werthe von z und die entsprechenden Werthe (u) der Linie $k'y'h'$ als die rechtwinkligen Coordinaten dieser Curve betrachtet werden. Da nun d^2z für den Werth von u , welcher dem Punkte a entspricht (ω_2, ω_2), gleich Null wird, so hat die Curve im Punkte a einen singulären Punkt, wie aus der Theorie der ebenen Curven bekannt ist. Da nun die höheren Differenzialien von z für jene zweiten Werthe nicht ebenfalls gleich Null sind (ausser nur bei den windschiefen Flächen der zweiten Ordnung), so folgt, dass die Curve hak in h einen **Inflexionspunkt** habe. Nur für die windschiefen Flächen der zweiten Ordnung ist diese Curve eine gerade Linie, für welche sowohl d^2z , als d^3z und der Reihe nach alle höheren Differenzialien gleich Null sind. Die gerade Linie kann aber analytisch ebenfalls als eine Curve betrachtet werden, die in allen ihren Punkten Inflexionspunkte hat.

Zusatz. Uebrigens müssen alle Curven, die aus den Durchschnitten von Ebenen, welche durch die Linie (ω_2, ω_2) wie immer gelegt werden, mit windschiefen Flächen gebildet werden, im Punkte (x, y, z) einen singulären Punkt haben, da für alle $d^2z=0$ wird. Diess gilt auch dann noch, wenn diese Durchschnittsebene durch die beiden geraden Linien (ω_1, ω_1) und (ω_2, ω_2) gelegt wird, eine Ebene, welche die **tangirende** Ebene der windschiefen Fläche selbst ist.

7) Da jede tangirende Ebene durch die beiden Tangenten je zweier Durchschnittscurven im Punkte (x, y, z) bestimmt wird, so folgt, dass die tangirende Ebene einer windschiefen Fläche in jedem Punkte mit dieser Fläche sowohl die gerade Durchschnittslinie, als auch eine Durchschnittscurve gemeinschaftlich habe, deren Tangente durch ω_2, ω_2 bestimmt wird. Denn man braucht nur durch diese Tangente und durch die gerade Durchschnittslinie eine Ebene zu legen, so ist diese Ebene die tangirende Ebene, und da für sie d^2z nach einer Richtung hin allgemein gleich Null ist (für den Durchschnitt in der geraden Linie), nach einer zweiten Linie aber d^2z nur singulär gleich Null ist, so folgt, dass auch in dieser Richtung die tangirende Ebene und die windschiefe Fläche sich durchschneiden, also eine Durchschnittscurve gemeinschaftlich haben. Diese ausgezeichnete Eigenschaft der windschiefen Flächen kann durch folgende Betrachtungen anschaulicher gemacht werden.

Wenn eine ebene Curve einen Inflexionspunkt hat, so durchschneidet die Tangente diese Curve singulär im Punkte m , und das zweite Differenzial der Ordinate wird singulär gleich Null. Eine Folge davon ist, dass, wenn η und ξ die Coordinaten der Tangente, und y und x die Coordinaten der Curve ausdrücken, alle Werthe von η vor



dem Inflexionspunkte $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\}$ als die entsprechenden Werthe von y , hingegen nach

dem Inflexionspunkte $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{smallmatrix} \right\}$ als die entsprechenden Werthe von y sind. — Eine fernere Folge ist, dass für die Abnahme und Zunahme von x

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2.3} d^2 y + \frac{1}{2.3.4} d^3 y + \dots$$

$$\Delta_1 y = dy + \frac{1}{2.3} d^2 y - \frac{1}{2.3} d^3 y + \dots$$

das erste Differenzial dy $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{smallmatrix} \right\}$ ist, als die ganze Zunahme oder Abnahme, weil

die Ausdrücke: $\frac{1}{2.3} d^2 y$ in der Reihe der Zunahme und der Abnahme *gleiche* Zeichen haben, und die zweiten Differenzialien, welche *ungleiche* Zeichen haben, bei dem singulären Werthe $d^2 y = 0$ ausfallen. Ganz Analoges findet nun auch bei den windschiefen Flächen statt.

Es sei nun: $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, so sind, wenn z als Function von x und y genommen wird, die Reihen der Zunahme und Abnahme von z :

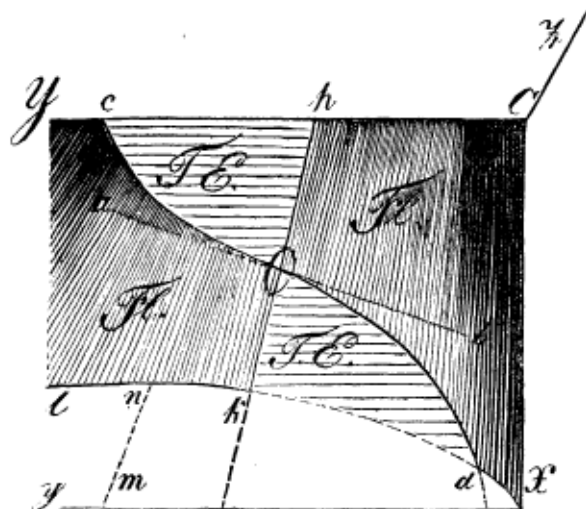
$$\Delta z = dz + \frac{1}{2} d^2 z + \frac{1}{2.3} d^3 z + \frac{1}{2.3.4} d^4 z + \dots;$$

$$\Delta_1 z = dz - \frac{1}{2} d^2 z + \frac{1}{2.3} d^3 z - \frac{1}{2.3.4} d^4 z + \dots$$

Da für windschiefe Flächen die Gleichung gilt: $d^2 z = 0$, so gehen die obigen Reihen in folgende über:

$$\Delta z = dz + \frac{1}{2.3} d^3 z + \frac{1}{2.3.4} d^4 z + \dots$$

$$\Delta_1 z = dz + \frac{1}{2.3} d^3 z - \frac{1}{2.3.4} d^4 z + \dots$$



Da die beiden ersten Glieder in beiden Reihen dieselben Zeichen haben, so ist auch dz $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{smallmatrix} \right\}$ als Δz für die Zunahme, wie für die Abnahme. Es muss daher bei allen Werthen von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, welche $d^2 z = 0$ machen, die tangirende Ebene die windschiefe Fläche durchschneiden. Diese Werthe sind aber doppelt: (ω_1, ω_1) ; (ω_2, ω_2) . —

Ist daher die Fläche: $YhCXdkul$ ein Theil einer windschiefen Fläche und entspricht für den Punkt O die

gerade Durchschnittslinie hk den ersten Werthen (ω_1, ω_1) , und die Tangente ab den zweiten Werthen (ω_2, ω_2) , und wird durch die Linien hk und ab die tangirende Ebene zu O gelegt,

so durchschneidet diese Ebene die windschiefe Fläche: 1) in der geraden Linie hk , 2) in einer Curve cOd , deren Tangente ab ist.

Eine Folge davon ist, dass, wenn die tangirende Ebene zwischen der geraden Linie Ok und der Curve Od *über* der windschiefen Fläche ist, sie sowohl zwischen Ok und Oc , als auch zwischen Oh und Od *unter* dieser Fläche sein müssen, weil sich die tangirende Ebene und die gegebene Fläche in Ok und Od durchschneiden. Aus demselben Grunde muss aber die tangirende Ebene wieder zwischen cO und Oh *über* der windschiefen Fläche sein, weil sie jenseits dieser beiden Linien cO und Oh *unter* dieser Fläche ist.

Daraus folgt, dass sich die jedesmalige tangirende Ebene und die windschiefe Fläche nicht bloss singular, sondern in allen Punkten der Fläche in je *zwei* Linien durchschneiden. Diess ist eine Eigenschaft, welche die windschiefen Flächen vor allen andern auszeichnet.

Die beiden Linien, die Gerade hk und die Curve cd , sind bei den windschiefen Flächen dasselbe, was bei ebenen Curven der Inflexionspunkt ist; die tangirende Ebene durchschneidet diese Flächen in den zwei Linien, wie die Tangente die ebenen Curven im Inflexionspunkte durchschneidet. Nur besteht der Unterschied, dass der Inflexionspunkt bei ebenen Curven ein singularer Punkt ist, während bei windschiefen Flächen die zwei Durchschnittslinien in allen Punkten stattfinden müssen.

8. Es ergeben sich nun andere höchst einfache Kriterien für die windschiefen Flächen. Verbindet man nämlich die Gleichung dieser Flächen $f(x,y,z)=0$, mit der Gleichung der tangirenden Ebene:

$$(\xi-x)\left|\frac{dz}{dx}\right|+(\eta-y)\left|\frac{dz}{dy}\right|=\zeta-z,$$

so müssen sich, im Falle die Fläche windschief ist, zwei Durchschnittscurven ergeben, 1) die gerade Linie, 2) die Durchschnittscurve mit der Tangente ab . (Bei developpablen Flächen kann sich nur eine Durchschnittscurve ergeben, die einzige gerade Linie, welche der Fläche und der tangirenden Ebene gemeinschaftlich ist; bei doppelt krummen Flächen kann gar keine Durchschnittslinie aus der Verbindung beider Gleichungen hervorgehen, da diese Flächen mit ihren tangirenden Ebenen nur einen Punkt, nicht aber eine Linie gemeinschaftlich haben.)

Um sogleich an bestimmte Beispiele anzuschliessen, so sei:

1) $ax^2=x^2y$, die Gleichung einer windschiefen Fläche gegeben.

Diese Fläche entsteht durch die Bewegung zweier sich durchschneidender gerader Linien: ab, mn ; $a'b', m'n'$ etc. Wird durch einen beliebigen Punkt A eine Ebene senkrecht auf AX gelegt, so durchschneidet sie die windschiefe Fläche in der Apollonischen Parabel nAb , deren Axe Ay' , deren Scheitel in A und deren Parameter gleich $\frac{(AO)^2}{a}$ ist. Ein Zweig dieser Parabel, Aun' , ist *über* der Ebene XY , der Zweig Abb' ist *unter* dieser Ebene. Legt man nun durch alle Punkte dieser Parabel Ebenen senkrecht auf OY , und verbindet man die Punkte n, c ; b, c ; n', c' ; b', c' etc.

Die erste Gleichung giebt wieder eine gerade Linie, die zweite wieder eine Parabel zweiter Ordnung.

Ziehen wir diese tangirende Ebene $hkabmMn$ durch die Gerade mn , welche den ersten Werthen ω_1, ω_1 entspricht, und durch die Gerade pr , welche den zweiten Werthen ω_2, ω_2 entspricht, so durchschneidet sie die windschiefe Fläche in der geraden Linie mn , und in einer Curve, deren Projection auf die Ebene XY die Parabel $baMkh$

ist. Die Linie par ist die Tangente dieser Parabel im Punkte a . Zwischen ka und dem Punkte M ist die windschiefe Fläche über der Ebene; ebenso zwischen ba und am . Aber zwischen Ma, am und ka, ba, hk ist die tangirende Ebene über der windschiefen Fläche.

Man kann sich davon auch durch eine leichte Rechnung überzeugen. Die Gleichung der tangirenden Ebene im Punkte a ist:

$$\zeta = \xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}a.$$

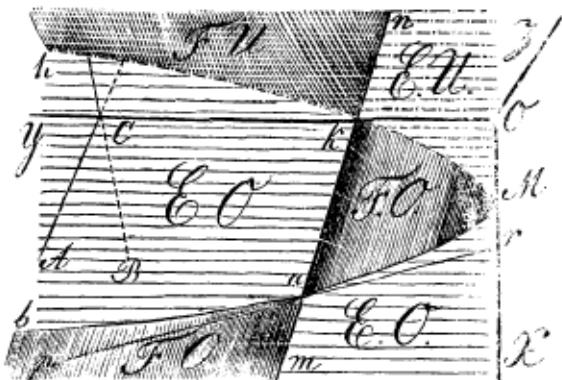
Die Gleichung der windschiefen Fläche ist:

$$z = x\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

In der Linie mn , in deren sämtlichen Punkten $y=a$ ist, ist $\zeta=z$ und $\xi=x$. Diese gerade Linie liegt also ganz in der windschiefen Fläche. Ebenso liegen die Punkte der Parabel, z. B. $(\xi=x=\frac{1}{2}a, \eta=y=0, \zeta=z=0)$; $(\xi=x=\frac{3}{4}a, \eta=y=\frac{1}{4}a, \zeta=z=\frac{3}{8}a)$; $(\xi=x=\frac{5}{4}a, \eta=y=\frac{9}{4}a, \zeta=z=\frac{15}{8}a)$ u. s. w., in der tangirenden Ebene und zugleich in der windschiefen Fläche. Untersucht man nun Punkte der windschiefen Fläche und der tangirenden Ebene, für welche $x < a$ und $y < a$ ist, z. B. $\xi=x=\frac{1}{2}a, \eta=y=\frac{1}{4}a$, so ist: $\zeta=\frac{1}{8}a$, und $z=\frac{1}{4}a$ u. s. w. [Die windschiefe Fläche liegt also hier über der tangirenden Ebene.

Untersucht man Werthe, für welche $x < a$ und $y > a$ ist; $\xi=x=\frac{1}{2}a, \eta=y=\frac{5}{4}a$, so ist $\zeta=\frac{5}{8}a$, und $z=\frac{1}{4}a\sqrt{5}$, also $\zeta > z$, und die tangirende Ebene liegt über der windschiefen Fläche.

Untersucht man Werthe, für welche $x > a$ und $y < a$ ist, z. B. $\xi=x=3a, \eta=y=\frac{1}{4}a$, so ist $\zeta=\frac{9}{8}a$ und $z=\frac{3}{4}a$. Die tangirende Ebene liegt also in diesen Punkten über der windschiefen Fläche. Endlich ist für Werthe in dem Raume bam ,



z. B. $\xi = x = \frac{3}{2}a$, $\eta = y = \frac{5}{4}a$, die Ordinate $\zeta = \frac{13}{8}a$, und $z = \frac{3}{4}a\sqrt{5}$; $\zeta^2 = \frac{169}{64}$, $z^2 = \frac{180}{64}$, also $z > \zeta$, und die windschiefe Fläche liegt wieder über der tangirenden Ebene.

In dem andern Arme der Parabel Mkh durchschneidet die tangirende Ebene die untere Hälfte der windschiefen Fläche; und es liegt in dem Raume $E.U.$, der sich bis mkM erstreckt, die tangirende Ebene unter der windschiefen Fläche hingegen im Raume $F.U.$ über dieser Fläche, u. s. w.

Beispiel 2. Es sei die Gleichung einer windschiefen Fläche gegeben:

$$x^2 + y^2 - a^2 = z^2$$

(ein Hyperboloid mit einem Fache).

Aus der partiellen Differenzirung ergibt sich, dass

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{x}{z}; \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{y}{z}$$

sei. Die Gleichung der tangirenden Ebene ist daher:

$$(\xi - x) \frac{x}{z} + (\eta - y) \frac{y}{z} = \zeta - z.$$

Für irgend einen Punkt dieses Hyperboloids, z. B. für $x = a$, $y = \frac{1}{2}a$, $z = \frac{1}{2}a$, wird diese Gleichung:

$$2(\xi - a) + \eta = \zeta.$$

Verbindet man diese Gleichung: $2(x - a) + y = z$, (da für alle Durchschnittspunkte $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ ist) mit der gegebenen Gleichung: $x^2 + y^2 - a^2 = z^2$, so erhält man die beiden Durchschnittscurven. Eliminirt man z. B. z , so ist:

$$(2[x - a] + y)^2 = x^2 + y^2 - a^2,$$

oder:

$$4(x - a)^2 + 4(x - a)y = (x - a)(x + a).$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden Gleichungen:

$$x - a = 0 \text{ (I.) und } 4(x - a) + 4y = x + a. \text{ (II.)}$$

Da sowohl Gleichung (I.), als Gleichung (II.) geraden Linien angehören, so wird das Hyperboloid mit einem Fache in allen Punkten von ihrer tangirenden Ebene in zwei sich im Berührungspunkte gegenseitig durchschneidenden geraden Linien geschnitten.

9. Aus den vorhergehenden Beispielen wird einleuchtend, dass, wenn die Gleichung einer windschiefen Fläche eine algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade ist, diese durch ihre Verbindung mit der Gleichung der tangirenden Ebene, in ihren Projectionen auf Gleichungen des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgebracht werde. Denn in den Endgleichungen dividirt sich ein Factor des ersten Grades (die Gleichung der geraden Durchschnittslinie) heraus; die andere Durchschnittscurve bleibt daher nur noch vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Ist daher die Gleichung einer windschiefen Fläche vom 2^{ten} Grade, so besteht die Endgleichung aus zwei einfachen Factoren, die zwei geraden Durchschnittslinien entsprechen, wie sich diess bei den Endgleichungen des **Hyperboloids**

mit einem *Fache* ergeben hat. Jede windschiefe Fläche, die eine algebraische Gleichung vom 2^{ten} Grade hat, wird also in allen Punkten von ihren tangirenden Ebenen in zwei sich durchschneidenden geraden Linien durchschnitten. Diess gilt aber keineswegs von den windschiefen Flächen mit Gleichungen vom dritten, vierten oder von höheren Graden. Diese werden in allen Punkten von ihren tangirenden Ebenen in geraden Linien und in Curven vom $(n-1)$ ^{ten} Grade durchschnitten, wenn die windschiefe Fläche vom n ^{ten} Grade ist. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die tangirenden Ebenen bei windschiefen Flächen der zweiten Ordnung durch die beiden geraden Linien gehen, in denen diese Flächen in jedem Punkte durchschnitten werden können.

Zusatz. Es ist in (6) bemerkt worden, dass die Durchschnittsebenen der windschiefen Flächen, die durch (ω_1, ω_1) und (ω_2, ω_2) gelegt werden, Curven erzeugen, die im Punkte (x, y, z) singuläre Punkte haben. Nun hat aber in Beispiel 1. die Parabel $x^2 - ax = \frac{1}{4}a(y-a)$ in den Punkten $x=a, y=a, z=a$ keinen singulären Punkt, was dem früher Bewiesenen zu widersprechen scheint. Es ist aber zu bemerken, dass nicht: $x^2 - ax = \frac{1}{4}a(y-a)$ die ganze Gleichung der Durchschnittscurve ist, sondern vielmehr die Gleichung: $(y-a)(x^2 - ax) = \frac{1}{4}a(y-a)^2$, welche allerdings im Punkte $x=a, y=a, z=a$ einen singulären Punkt hat, nämlich einen *doppelten* Punkt, indem sich die Curve vom Punkte a aus in zwei Richtungen, einmal in einer geraden Linie und dann in einer Parabel, fortsetzt. — Ebenso hat in Beispiel 2. die Curve (gerade Linie): $(x-a)([4x-a]+4y-[x+a])=0$ im Punkte (x, y, z) einen doppelten Punkt, da sich die zwei geraden Linien, die durch das System der einen Gleichung: $(x-a)([4x-a]+4y-[x+a])=0$ ausgedrückt werden, in diesem Punkte durchschneiden und in zwei verschiedenen Richtungen fortsetzen.

Anmerkung. Im Gegensatze mit diesen Eigenschaften der *windschiefen* Flächen werden die *developpablen* Flächen von ihren tangirenden Ebenen in jedem Punkte nur in einer geraden Linie berührt. (Die cylindrischen, conischen und evolutorischen Flächen werden von ihren tangirenden Ebenen allgemein in geraden Linien *berührt*, die windschiefen Flächen werden aber in geraden Linien *durchschnitten*.) Verbindet man daher die Gleichungen der developpablen Flächen mit den Gleichungen ihrer tangirenden Ebenen, so können beide nur die gerade Durchschnittslinie gemeinschaftlich haben.

Nimmt man z. B. die Gleichung der evolutorischen Fläche (pag. 54):

$$p^2y = 3pxz - 2z^3 + 2\sqrt{(z^2 - px)^3}, \quad (a)$$

so ist die Gleichung ihrer tangirenden Ebene für einen Punkt, z. B. $x' = \frac{3}{4}p, z' = p,$

$y' = \frac{1}{2}p$, wenn man in die Gleichung:

$$(y-y')=(x-x')\left|\frac{dy'}{dx'}\right|+(z-z')\left|\frac{dy'}{dz'}\right|,$$

die Werthe $\left|\frac{dy'}{dx'}\right|=\frac{3}{2}$; $\left|\frac{dy'}{dz'}\right|=-\frac{3}{4}$ substituirt:

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}p. \quad (b)$$

Eliminirt man aus Gleichung (a) und (b) die eine Coordinate, z. B. y , so erhält man eine Endgleichung zwischen x und z , welche die Projection der geraden Durchschnittslinie in der Ebene XZ giebt. Diese Endgleichung ist:

$$\frac{3}{2}p^2x-\frac{3}{4}p^2z+\frac{1}{8}p^3=3pxz-2z^3+2\sqrt{(z^2-px)^3}.$$

Der Factor, der sich aus dieser Gleichung eliminiren lässt, und der die Projection der geraden Durchschnittslinie darstellt, wird auf folgende Art gefunden. Die *Tangente* der Wendungcurve ist diese gerade Durchschnittslinie. Die Gleichungen dieser

Tangente sind: $(z-z')=\frac{dz}{dx}(x-x')$; $(y-y')=\frac{dy}{dx}(x-x')$.

Nun ist $\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2z-2\sqrt{z^2-px}}$ (pag. 55), und $\frac{dy}{dx}$ wird aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}=\left|\frac{dy}{dx}\right|+\left|\frac{dy}{dz}\right|\frac{dz}{dx}$$

gefunden. Es ist $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2p}(z-\sqrt{z^2-px})$. Für $x=\frac{3}{4}p$, $z=p$, $y=\frac{1}{2}p$ ist $\frac{dz}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}$.

Die Gleichungen der Durchschnittslinie sind daher:

$$z-p=x-\frac{3}{4}p, \quad z=x+\frac{1}{4}p; \quad y-\frac{1}{2}p=\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}p\right), \quad y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}p.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung der evolutorischen Fläche substituirt:

$$p^2y=3pxz-2z^3+2\sqrt{(z^2-px)^3},$$

so machen sie diese Gleichung wirklich gleich Null, zum Beweise, dass jede Projection der tangirenden Ebene und der Fläche einen eliminirbaren einfachen Factor hat. So ist der Factor $z=x+\frac{1}{4}p$ in obiger Gleichung:

$$\frac{3}{2}p^2x-\frac{3}{4}p^2z+\frac{1}{8}p^3=3pxz-2z^3+2\sqrt{(z^2-px)^3},$$

dieser eliminirbare Factor, der auch wirklich jene Gleichung gleich Null macht, wie eine leichte Rechnung zeigt. — Es ist einleuchtend, dass die evolutorischen Flächen und ihre tangirenden Ebenen ausser ihrer geraden Durchschnittslinie keine andere Linie gemeinschaftlich haben, und dass daher jene Endgleichungen ausser den gefundenen Werthen keine anderen reellen Werthe haben können.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung der Fläche gegeben:

$$az^2 - x^2y = 0,$$

deren hauptsächlichste Eigenschaften bereits bestimmt worden sind.

1) Um zu entscheiden zu können, ob diess eine windschiefe Fläche sei, oder nicht, untersucht man die zweiten Differenzialen einer Ordinate, z. B. z , die als Function der beiden andern Ordinaten x und y genommen wird.

Es ist:

$$z = x\sqrt{\frac{y}{a}}; \quad \left|\frac{dz}{dx}\right| = \sqrt{\frac{y}{a}}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{ay}}; \quad \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| = 0; \quad \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{ay}}; \quad \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = -\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{ay}^3}.$$

Es ist daher:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} \pm \sqrt{\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} - \frac{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \pm \frac{2y}{x}.$$

Da der Quotient $\frac{dy}{dx}$ zwei Werthe hat, so ist die untersuchte Fläche eine windschiefe Fläche. Der eine Werth ist: $\frac{dy}{dx} = 0$; der andere Werth ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$.

2) Um bestimmen zu können, welcher dieser Werthe der geraden Linie, und welcher der Curve mit einem Inflexionspunkte zugehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \left|\frac{d^3z}{dx^3}\right| + 3\left|\frac{d^3z}{dx^2dy}\right|\frac{dy}{dx} + 3\left|\frac{d^3z}{dxdy^2}\right|\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left|\frac{d^3z}{dy^3}\right|\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Da

$$\left|\frac{d^3z}{dx^3}\right| = 0, \quad \left|\frac{d^3z}{dx^2dy}\right| = 0, \quad \left|\frac{d^3z}{dxdy^2}\right| = -\frac{1}{4\sqrt{ay}^3}; \quad \left|\frac{d^3z}{dy^3}\right| = +\frac{3}{8}\frac{x}{\sqrt{ay}^5};$$

so macht $\frac{dy}{dx} = 0$ das dritte Differenzial d^3z gleich Null, und der Werth $\frac{dy}{dx} = 0$ gehört zu

der geraden Linie. Hingegen macht der Werth $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$ das dritte Differenzial:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16y^2}{x^2\sqrt{ay}^3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{64y^3}{x^2\sqrt{ay}^5} = +\frac{12}{x^2}\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Der Werth $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$ zeigt also die Richtung der Curve mit einem Inflexionspunkte an.

3) Die eine Gleichung der geraden Linie ist, da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist: $\frac{y-y}{x-x} = 0$.

Um eine zweite Gleichung zu finden, nimmt man eine andere Coordinate, z. B. y als Function von x und z , und sucht nun $\frac{dz}{dx}$. Da $y = \frac{az^2}{x^2}$ ist, so ist:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = -\frac{2az^2}{x^3}; \quad \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{2az}{x^2}; \quad \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| = \frac{6az^2}{x^4}; \quad \left| \frac{d^2y}{dx dz} \right| = -\frac{4az}{x^3}; \quad \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right| = \frac{2a}{x^2}.$$

Daraus folgt, dass:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|} + \sqrt{\frac{\left| \frac{d^2y}{dx dz} \right|^2 - \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|}}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} + \frac{z}{x}$$

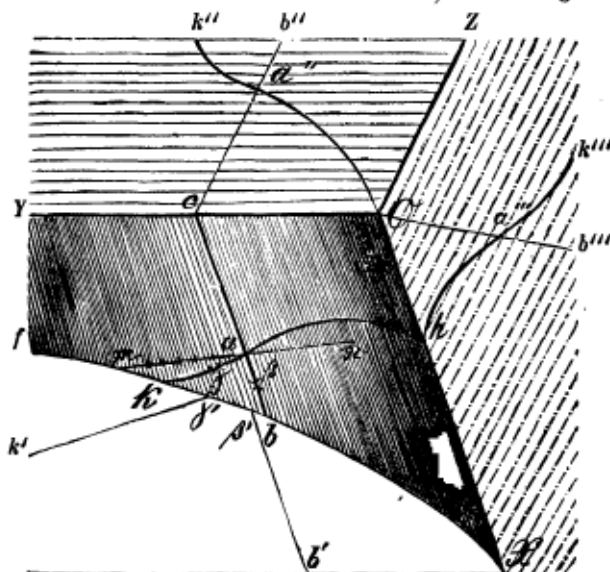
sei. Von diesen beiden Werthen: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{3z}{x}$, macht $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$ das dritte Differenzial gleich Null; er gehört also zu der geraden Linie. Diess giebt die zweite Gleichung der geraden Linie: $\frac{\xi - z}{\xi - x} = \frac{z}{x}$.

Diese Gleichung in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung: $\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0$ bestimmt die gesuchte gerade Linie.

4) Die Leitungscurven können beliebig gefunden werden. Durchschneidet man die gegebene Fläche parallel mit der Ebene YZ , und wird x constant $= x'$ genommen, so hat die Durchschnittscurve die Gleichung: $az^2 - x'^2 y$. Sie ist also eine Apollonische Parabel, deren Scheitel in A ist, wie schon früher gefunden wurde.

5) Die Lage der tangirenden Ebene, und ihre Durchschnittscurve mit der windschiefen Fläche ist bereits in den vorhergehenden Untersuchungen bestimmt worden.

6) Legt man in einen Punkt a , z. B. $x=a$, $y=a$, $z=a$, senkrecht auf die Coordinaten-Ebene XY eine Ebene durch die Linie mn , deren Lage durch die zweiten



Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, $\omega_1 = \frac{4y}{x}$, $\omega_2 = \frac{3z}{x}$ bestimmt ist, so durchschneidet diese Ebene

die windschiefe Fläche in der Curve *kah*. Die Gleichung dieser Ebene ist: $\frac{(\eta-a)}{\xi-a}=4$, oder: $4\xi-3a=\eta$. Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der windschiefen Fläche: $z=x\sqrt{\frac{y}{a}}$, so ist die Curve *hak* durch diese beiden Gleichungen bestimmt. Die Projection dieser Curve auf die Ebene *XY* ist die gerade Linie $k'\gamma'h$, ihre Projection auf die Ebene *ZY* ist die Curve $Oa''k''$ und ihre Projection auf die Ebene *XZ* ist die Curve $ha'''k'''$.

Die Gleichung der Curve $Oa''k''$ findet man, wenn man aus den gegebenen Gleichungen: $4x-3a=y$ (I.) und $z=x\sqrt{\frac{y}{a}}$ die Grösse x eliminirt. Diese Gleichung ist:

$$z=\left(\frac{y+3a}{4}\right)\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Daraus findet man:

$$dz=\left(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{y}{a}}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{a}{y}}\right)dy; \quad d^2z=\left(\frac{3}{16}\sqrt{\frac{1}{ay}}-\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{a}{y}}\right)dy^2.$$

Für $d^2z=0$ wird $\sqrt{\frac{1}{ay}}=\sqrt{\frac{a}{y^3}}$, und $y=\pm a$.

Weil in der Fläche, $z=x\sqrt{\frac{y}{a}}$, die Coordinate y nur *positive* Werthe haben kann, so folgt, dass die Curve im Punkte $y=a$ einen Inflexionspunkt habe.

Eliminirt man aus den Gleichungen (I.) und (II.) die Grösse y , so geht die Gleichung der Projection $Oa''k''$ hervor:

$$z=x\sqrt{\left(\frac{4x}{a}-3\right)}.$$

Daraus findet man:

$$dz=\sqrt{\left(\frac{4x}{a}-3\right)}dx+\frac{2x}{a}\frac{dx}{\sqrt{\frac{4x}{a}-3}}; \quad d^2z=\frac{4dx^2}{a\sqrt{\frac{4x}{a}-3}}-\frac{4x}{a^2}\frac{dx^2}{\left(\frac{4x}{a}-3\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$d^2z=\left(\frac{16x-12a-4x}{a^2\sqrt{\frac{4x}{a}-3}}\right)dx,$$

und für d^2z folgt: $x=a$.

Die Curve $Oa''k''$ hat also für $x=a$ ebenfalls einen Inflexionspunkt.

Da nun die beiden Projectionen der Curve *kah* für die Werthe $y=a$ und $x=a$ Inflexionspunkte haben, so hat die Curve *kah* für $y=a$, $x=a$ (woraus sich von selbst $z=a$ ergibt) gleichfalls einen Inflexionspunkt.

Zusatz. Die Projectionen der Curve *kah* auf die drei Coordinaten-Ebenen sind also: 1) auf die Ebene *XY* die gerade Linie $k'\gamma'h$, 2) auf die Ebene *YZ* die Curve $Oa''k''$, 3) auf die Ebene *XZ* die Curve $ha'''k'''$.

Hingegen hat die gerade Durchschnittslinie der Fläche, nämlich *cab*, folgende Projectionen: auf die Ebene *XY* die Linie $b'\beta'$, 2) auf die Ebene *YZ* die Linie ch'' ,

1) Es ist aus der Gleichung $z = ar \arctan \frac{y}{x}$:

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = -\frac{ary}{x^2+y^2}; \quad \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{arx}{x^2+y^2};$$

$$\left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| = \frac{2arxy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right| = \frac{-2arxy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \left| \frac{d^2z}{dxdy} \right| = \frac{ar(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Da $\left| \frac{d^2z}{dx^2} \right|$ und $\left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$ verschiedene Zeichen haben, so ist die Fläche eine *windschiefe* Fläche, da immer

$$\left| \frac{d^2z}{dxdy} \right|^2 > \left| \frac{d^2z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2z}{dy^2} \right|$$

ist. Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} + \frac{x^2+y^2}{2xy},$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{y}{x}.$$

2) Um entscheiden zu können, welcher dieser Werthe der geraden Linie angehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial. Man findet, dass der Werth $\frac{y}{x}$ das dritte Differenzial gleich Null macht, und es ist:

$$\omega_1 = +\frac{y}{x}; \quad \omega_2 = -\frac{x}{y}.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{\eta-y}{\xi-x} = \frac{y}{x}, \quad (I.) \quad \frac{\eta-y}{\xi-x} = -\frac{x}{y}. \quad (II.)$$

3) Auf dieselbe Art bestimmt man die Werthe $\frac{dz}{dx}$, indem man die partiellen Differenzialien der Gleichung: $y = x \arctan \left(\frac{z}{ar} \right)$ nimmt.

Da $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, so ergibt sich von selbst, dass die untersuchte Fläche eine windschiefe Fläche, und dass der eine Werth von $\frac{dz}{dx}$ gleich Null sei.

Denn es ist:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left| \frac{d^2y}{dxdz} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|} + \frac{\left| \frac{d^2y}{dxdz} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|},$$

also:

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2 \left| \frac{d^2y}{dxdz} \right|}{\left| \frac{d^2y}{dz^2} \right|}.$$

Nun ist

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \operatorname{tang} \frac{z}{ar} : \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{ar \left(\cos \frac{z}{ar} \right)^2};$$

$$\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| = 0, \quad \left| \frac{d^2y}{dx dz} \right| = \frac{1}{ar \left(\cos \frac{z}{ar} \right)^2}; \quad \left| \frac{d^2y}{dz^2} \right| = \frac{2x \sin \frac{z}{ar}}{a^2 r^2 \left(\cos \frac{z}{ar} \right)^3}.$$

Es ist daher der zweite Werth von $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{ar}{x \operatorname{tang} \frac{z}{ar}} = - \frac{ar}{y}.$$

Da endlich $\left| \frac{d^3y}{dx^3} \right| = 0$ ist, so folgt, dass der Werth $\frac{dz}{dx} = 0$ das dritte Differenzial d^3y gleich Null mache. Es ist also $\frac{dz}{dx} = 0$ der erste Werth ω_1 , und $\frac{dz}{dx} = - \frac{ar}{y}$ der zweite Werth ω_2 .

Aus ω_1 folgt, dass $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = 0$ die zweite Gleichung der geraden Durchschnittslinie sei. Die Gleichung aus ω_2 , nämlich:

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x} = - \frac{ar}{x \operatorname{tang} \frac{z}{ar}} = - \frac{ar}{y}$$

ist die zweite Gleichung der Tangente der Durchschnittscurve.

Die Gleichungen der geraden Durchschnittslinien sind also:

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{y}{x}, \quad (I.) \quad \frac{\zeta - z}{\xi - x} = 0. \quad (II.)$$

Aus Gleichung (II.) folgt, dass die gerade Durchschnittslinie immer parallel mit der Ebene XY ist, und aus Gleichung (I.) folgt, dass diese Linie immer die Ax durchschneidet, auf der sie also senkrecht steht.

4) Die Gleichung der tangirenden Ebene ist:

$$(\xi - x') \left| \frac{dz}{dx} \right| + (\eta - y') \left| \frac{dz}{dy} \right| = \zeta - z.$$

Werden die gefundenen Werthe von $\left| \frac{dz}{dx} \right|$ und $\left| \frac{dz}{dy} \right|$ substituirt, so folgt die Gleichung:

$$(\eta - y')x' - (\xi - x')y' = (\zeta - z) \left(\frac{x'^2 + y'^2}{ar} \right);$$

$$\eta x' - \xi y = (\zeta - z') \left(\frac{x'^2 + y'^2}{ar} \right).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der windschiefen Fläche:

$$z = ar \arctan \frac{y}{x}$$

so erhält man die zwei Durchschnittscurven der Ebene und der Fläche. Die eine dieser Curven ist immer eine gerade Linie.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen je eine der Coordinaten, so erhält man die entsprechenden Projectionen. So ist z. B. die Projection auf die Ebene XY :

$$\begin{aligned} \frac{(yx' - xy')}{x'^2 + y'^2} + \frac{z'}{ar} &= \arctan \frac{y}{x}; \\ \frac{y}{x} &= \tan \left(\frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{z'}{ar} \right), \\ \frac{y}{x} &= \tan \left(\frac{[y - y']x' - [x - x']y'}{x'^2 + y'^2} + \frac{z'}{ar} \right). \end{aligned}$$

Für alle Punkte, für welche

$$(y - y')x' - (x - x')y' = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

ist, folgt:

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{z'}{ar} = \frac{y'}{x'}.$$

Es erfolgen also zwei identische Gleichungen der nämlichen geraden Linie, welche die *Durchschnittslinie* ist. Und diess entspricht bei den transcendenten Gleichungen der Elimination eines einfachen Factors der algebraischen Gleichungen.

Obige Projection der Durchschnittscurve zerlegt sich also in die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (y - y')x' - (x - x')y' &= 0 \text{ (singular für die Durchschnittslinie),} \\ \frac{y}{x} &= \tan \left(\frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{z'}{ar} \right) \text{ (für die Durchschnittscurve).} \end{aligned}$$

Diese letztere Gleichung gilt überhaupt für die Durchschnittslinie und für die Durchschnittscurve, sowie bei algebraischen Curven die früher gefundenen Gleichungen, z. B.:

$$(x - y) \left(\frac{x^2}{a} - x - \frac{1}{4}[a - y] \right) = 0$$

für die Durchschnittslinie, wie für die Durchschnittscurve gelten. Bei algebraischen Gleichungen kann sogleich der eine Factor eliminirt werden, während bei transcendenten Gleichungen sämtliche Factoren vereinigt bleiben.

5) Die tangirende Ebene durchschneidet also die windschiefe Fläche in einer geraden Linie und in einer Curve. Diese Curve und die gerade Linie durchschneiden sich selber gegenseitig im Punkte (x', y', z') . Die tangirende Ebene ist also um den Punkt (x', y', z') herum zweimal *über* und zweimal *unter* der windschiefen Fläche. Davon kann man sich durch eine leichte Rechnung überzeugen.

Nimmt man in der Fläche:

$$z = ar \arctan \left(\tan \frac{y}{x} \right)$$

der Einfachheit willen $\alpha=1$, so ist für den Punkt:

$$x'=r\sqrt{\frac{1}{2}}, y'=r\sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ also } z'=\frac{r\pi}{4},$$

die Gleichung der tangirenden Ebene:

$$(\eta-\xi)\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}r\pi=\zeta,$$

und die Gleichung der Fläche:

$$z=r\text{arc.}\left(\text{tang.}\frac{y}{x}\right).$$

Nehmen wir in der tangirenden Ebene z. B. den Punkt:

$$\eta=(0,5)r, \xi=(0,6)r,$$

so ist

$$\zeta=(0,715)r,$$

und in der windschiefen Fläche für:

$$y=(0,5), x=(0,6)r: z=(0,695)r.$$

Es ist also ζ grösser als z (I).

Für $\eta=(0,5)r, \xi=(0,4)r$ ist $\zeta=(0,856)r$ und $z=(0,896)r$.

Es ist also ζ kleiner als z (II).

Für $\eta=r, x=(0,5)r$ ist $\zeta=(1,139)r$ und $z=(1,10)r$.

Es ist also ζ wieder grösser als z (III).

Für $\eta=r, x=(1,1)r$ ist $\zeta=(0,715)r$ und $z=(0,739)r$.

Es ist also ζ kleiner als z (IV).

Die tangirende Ebene und die windschiefe Fläche durchschneiden sich also zweimal im Punkte (x, y, z) , und liegen um diesen Punkt herum zweimal *über* einander und *unter* einander:

6) Legt man im Punkte (x', y', z) durch die Linie:

$$\frac{\eta-y'}{\xi-x'}=-\frac{x'}{y'}$$

eine Ebene durch die Coordinate z , also senkrecht auf XY , so ist die Gleichung dieser Ebene selbst:

$$\frac{\eta-y'}{\xi-x'}=-\frac{x'}{y'}.$$

Für $x'=y'$, z. B. $=r\sqrt{\frac{1}{2}}$, geht diese Gleichung in:

$$(\eta+\xi)=r\sqrt{2}$$

über. Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der windschiefen Fläche:

$$\frac{y}{x}=\text{tang.}\left(\frac{z}{r}\right),$$

so ist die Projection der Durchschnittscurve auf die Ebene XZ :

$$\frac{r\sqrt{2}-x}{x}=\text{tang.}\left(\frac{z}{r}\right), \text{ oder } z=r\text{arc.tang.}\left(\frac{r\sqrt{2}-x}{x}\right) \text{ (I).}$$

Ihre Projection auf die Ebene YZ hat die Gleichung:

$$\frac{y}{r\sqrt{2}-y} = \text{tang.} \frac{z}{r}; \quad z = r \text{ arc. tang.} \left(\frac{y}{r\sqrt{2}-y} \right). \quad (\text{II.})$$

Beide Curven haben im Punkte:

$$x = r\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = r\sqrt{\frac{1}{2}}$$

einen Inflexionspunkt. Denn es ist in Curve (I.)

$$dz = -\frac{r^2\sqrt{2} \, dx}{2(x^2 - rx\sqrt{2} + r^2)}; \quad d^2z = \frac{r^2\sqrt{2}(2x - r\sqrt{2})dx^2}{2(x^2 - rx\sqrt{2} + r^2)^2}.$$

Für

$2x = r\sqrt{2}$, oder $x = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, wird $d^2z = 0$. Die Curve (I) hat also in diesem Punkte einen Inflexionspunkt.

In der Gleichung der Curve (II.) ist:

$$dz = \frac{r^2\sqrt{2}dy}{2(y^2 - ry\sqrt{2} + r^2)}, \quad d^2z = -\frac{r^2\sqrt{2}(2y - r\sqrt{2})dr^2}{2(y^2 - ry\sqrt{2} + r^2)^2}.$$

Da für $y = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ wieder $d^2z = 0$ wird, so hat auch die Curve (II) im Punkte:

$(y = r\sqrt{\frac{1}{2}})$ einen Inflexionspunkt.

Beispiel 3. Es soll die Gleichung der windschiefen Fläche bestimmt werden, welche durch die Bewegung der geraden Linie:

$$x - \frac{\alpha}{p} = (z - \alpha) \frac{\alpha^2}{p^2}; \quad y = (z - \alpha) \frac{p}{\alpha},$$

beschrieben wird. Die Grösse p ist constant, und α ist eine Function der Veränderlichen x, y, z .

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen die Function α , so findet man als Endgleichung:

$$\frac{p^2x(p+y)^2}{p^2(p^2+py+yz)} = \alpha = \frac{pz}{p+y},$$

oder

$$x = \frac{z^2(p^2+py+yz)}{(p+y)^3}.$$

Dass diese Gleichung wirklich die Gleichung einer windschiefen Fläche sei, geht aus folgenden Rechnungen hervor. Es ist:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx}{dz} \right| &= \frac{2p^2z + 2pyz + 3yz^2}{(p+y)^3}; & \left| \frac{dx}{dy} \right| &= \frac{pz^3 - 2p^2z^2 - 2pyz^2 - 2yz^3}{(p+y)^4}; \\ \left| \frac{d_x x}{dz^2} \right| &= \frac{2p^2 + 2py + 6yz}{(p+y)^3}; & \left| \frac{d^2 x}{dy^2} \right| &= \frac{6(pyz^2 + p^2z^2 + yz^3 - pz^3)}{(p+y)^5}; \\ \left| \frac{d^2 x}{dy dz} \right| &= \frac{3pz^2 - 4p^2z - 4pyz - 6yz^2}{(p+y)^4}. \end{aligned}$$

Es ist daher:

$$\left| \frac{d^2x}{dydz} \right|^2 - \left| \frac{d^2x}{dy^2} \right| \left| \frac{d^2x}{dz^2} \right| \text{ gleich: } 4z^2 \left(p^2 + py - \frac{3}{2} pz \right)^2,$$

ein Product zweier Quadrate, das immer eine positive Grösse ist. Dieses ist aber das Criterium für die windschiefen Flächen.

Man findet für

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{\left| \frac{d^2x}{dydz} \right|}{\left| \frac{d^2x}{dz^2} \right|} + \frac{2zp \left(p + y - \frac{3}{2} z \right)}{\left| \frac{d^2x}{dz^2} \right|},$$

also je zwei Werthe, die ohne Schwierigkeit berechnet werden können.

Allgemeine Anmerkungen zu den geradlinigen krummen Flächen.

1) Gehen wir von den Gleichungen einer geraden Linie aus, durch deren Bewegung eine geradlinige krumme Fläche beschrieben wird,

$$(y - F\alpha) = (x - \alpha)\varphi\alpha; \quad (z - f\alpha) = (x - \alpha)\psi\alpha,$$

so ist

1) die beschriebene Fläche cylindrisch, wenn $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ constante Grössen sind, α , $f\alpha$ und $F\alpha$ mögen was immer für Functionen sein.

2) Die Fläche ist *conisch*, wenn α , $f\alpha$ und $F\alpha$ constante Grössen (die Coordinaten des Scheitels) sind, die Grössen, $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ mögen was immer für Functionen veränderlicher Grössen sein.

3) Die Fläche ist *evolutorisch*, wenn

$$\varphi\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha} \quad \text{und} \quad \psi\alpha = \frac{df\alpha}{d\alpha}$$

ist, die Grössen α , $f\alpha$, $F\alpha$ mögen übrigens was immer für Functionen veränderlicher Grössen sein.

4) Die Fläche ist *windschief*, wenn weder α , $f\alpha$, $F\alpha$ sämmtlich constant, noch $\varphi\alpha$ und $f\alpha$ miteinander constant, noch auch

$$\varphi\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha}, \quad \text{und} \quad \psi\alpha = \frac{df\alpha}{d\alpha}$$

ist. Diess stellt die Unterschiede der vier Arten der geradlinig krummen Flächen aufs Deutlichste heraus, und giebt die Mittel an der Hand, die Gleichungen solcher Flächen aufs Leichteste zu bilden.

So muss z. B. die Endgleichung, die aus der Elimination von α aus den beiden Gleichungen hervorgeht:

$$x - \frac{\alpha^3}{p} = 3(z - \alpha); \quad y - \frac{\alpha^2}{p} = 2(z - \alpha)$$

eine *cylindrische* Fläche geben, weil $q\alpha = 3$ und $p\alpha = 2$ constante Grössen sind. Eben so muss die Endgleichung von

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{\alpha^3}{p^3}; \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{p}$$

eine *conische* Fläche geben, weil in den Gleichungen

$$(y - F\alpha) = (x - \alpha) q\alpha; \quad z - f\alpha = (x - \alpha) p\alpha$$

die Grössen α , $f\alpha$, $F\alpha$ gleich Null, also sämmtlich constant sind. Diese Endgleichung ist $y^3 = xz^2$, und eine leichte Rechnung zeigt, dass sie einem Kegel zugehört, dessen Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten ist. Auf gleiche Art muss die Endgleichung von

$$(x - \alpha^2) = 2(z - \alpha) \alpha; \quad (x - \alpha^4) = 4(z - \alpha) \alpha^3$$

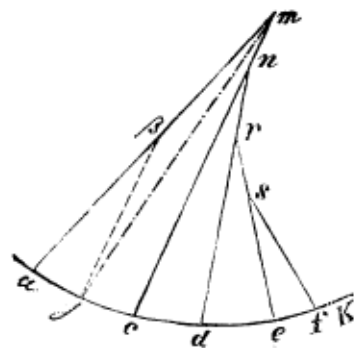
eine *evolutorische* Fläche geben, weil α^2 und 2α ; α^4 und $4\alpha^3$ Functionen und Differenzialien gegen einander sind.

Endlich muss z. B. die Endgleichung von

$$z = \frac{x\alpha}{p}, \quad y = \alpha; \quad \text{also } pz = xy$$

eine *windschiefe* Fläche geben, weil weder $q\alpha$ und $p\alpha$ mit einander constant, noch α , $f\alpha$, $F\alpha$ mit einander constant, noch auch $q\alpha$ und $p\alpha$ die ersten Differenzialien von $F\alpha$ und $f\alpha$ sind.

II. Die cylindrischen und conischen Flächen sind *developpable* Flächen, d. h. sie können ohne Falten oder Risse in Ebenen ausgebreitet werden. Diess ist, wie bekannt, nur bei solchen Flächen der Fall, die in geraden Linien so geschnitten werden, dass zwischen diese selbst eine Ebene gelegt werden kann. So sind die geraden Linien der cylindrischen Flächen parallel, und zwischen zwei parallelen Linien kann eine Ebene gelegt werden. So durchschneiden sich die geraden Linien der conischen Flächen im Scheitel, und zwischen zwei sich durchschneidenden geraden Linien kann eine Ebene gelegt werden. Die windschiefen Flächen hingegen können nicht ohne Falten und Risse in Ebenen ausgebreitet werden, wie allgemein angenommen und bewiesen wird. Es bleibt daher nur noch zu untersuchen übrig, ob die evolutorischen Flächen ohne Falten und Risse in Ebenen ausbreitbar, ob sie im strengen Sinne developpabel seien oder nicht. Als solche werden sie gewöhnlich angenommen; man denkt sich die Möglichkeit, dass sich die geraden Linien der evolutorischen Flächen, d. h. der Tangenten der Wendungscurven, zwar nicht in demselben Punkte, aber doch in verschiedenen auf einander folgenden Punkten durchschneiden, was in Zweifel gestellt werden kann; denn sie durchschneiden sich nicht, sondern sie gehen über und unter einander weg.



Wenn sich die geraden Linien am , mc , nd etc. in den Punkten m , n , r , s etc. durchschneiden, so können allerdings die einzelnen Streifen amc , cnd etc., also auch die ganze Fläche ohne Falten und Risse in eine Ebene ausgebreitet werden. Allein die geraden Linien können sich nicht durchschneiden. Denn durchschnitten sich z. B. die Linien am und cm in dem Punkte m , so müsste eine neue Linie von γ aus eine dieser Linien wieder durchschneiden, z. B. die Linie am im Punkte β . Und diese neuen Durchschnittspunkte könnten beliebig vermehrt werden. Die evolutorische Fläche müsste also im Punkte β (und in jedem andern Punkte) nach *zwei* Richtungen (βm und $\beta \gamma$) in geraden Linien durchschnitten werden können. Dann müssten für diesen Punkt die Differenzialien $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ je *zwei verschiedene* Werthe haben, welche die zwei Richtungen der geraden Linien angäben. Diess ist aber unmöglich, da in den evolutorischen Flächen

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|}{\left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|}, \text{ und } \frac{dz}{dx} = - \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx dz} \right|}{\left| \frac{d^2 y}{dz^2} \right|}$$

jedesmal nur einen *einzig*en Werth haben können.

Es scheint also die Voraussetzung unrichtig zu sein, dass sich die geraden Linien der evolutorischen Flächen gegenseitig durchschneiden. Man hat freilich die Differenzialien als unendlich kleine Grössen angenommen, allein diess sind sie nicht. Auch hat man die einzelnen Streifen als unendlich schmale Streifen angenommen. Allein so klein sie auch gedacht werden mögen, so sind sie doch niemals Ebenen, denn kein Theil einer krummen Fläche kann eine Ebene sein. Werden aber diese Streifen nur als Linien genommen, so sind sie keine Flächen; und werden sie als Flächen genommen, so kann durch sie keine Ebene gelegt werden, die sie in zwei auf einander folgenden Linien durchschneiden könnte.

Es ist daher noch die Frage zu entscheiden, ob die Flächen, denen die gemeinschaftliche Bedingungs-Gleichung:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|$$

zukommt (die cylindrischen, conischen und evolutorischen Flächen), in die allgemeine Benennung der *developpablen* Flächen zusammengefasst werden sollen oder nicht. Diese Frage hat zwar auf die Gleichungen dieser Flächen nicht den geringsten Einfluss, *aber sie kann bei den Untersuchungen über die Evoluten der Curven doppelter Krümmung einen wesentlichen Einfluss erlangen.*

Es ist wünschenswerth, dass diese Flächen, so wie sie eine gemeinschaftliche Bedingungs-Gleichung haben:

$$\left| \frac{d^2 z}{dx dy} \right|^2 = \left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right| \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|$$

auch ihre gemeinschaftliche Benennung beibehalten, d. h. dass sie developpable Flächen genannt werden. Es braucht nur der Begriff der developpablen Flächen erweitert zu werden, dass sie solche Flächen seien, denen obige Bedingungs-Gleichung zukommt, nicht aber solche Flächen, die immer ohne Falten und Risse in Ebenen ausgebreitet werden können. In diesem allgemeinen Sinne ist auch der Begriff der developpablen Flächen in den vorliegenden Untersuchungen gebraucht worden.



